MATRICES

DEF:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow S$ (número de objetos)

$(i,j) \longrightarrow a_{ij}$ $\quad i = 1, 2, \dots, m$

$\quad j = 1, 2, \dots, n$

De esta manera:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \vdots & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

→ COLUMNA

→ FILA

ORDEN

a_{ij}: elemento que pertenece a la fila i y columna j.

NOTACIONES:

i) $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

ii) $A \in M_{m \times n}$

OBS: Si $m = n \rightarrow$ la matriz es cuadrada y se suele denotar por A_n.

TIPOS DE MATRICES:

a) FILA

EJM: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}_{1 \times 4}$

b) COLUMNA

EJM: $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$

c) NULA

EJM: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$

d) TRIANGULAR SUPERIOR

EJM: $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

EN GENERAL:
i) $n = m$
ii) $a_{ij} = 0, \forall\, i > j$

e) TRIANGULAR INFERIOR

EJM: $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

EN GENERAL:
i) $n = m$
ii) $a_{ij} = 0, \forall\, i < j$

f) DIAGONAL

EJM: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

EN GENERAL
i) $n = m$
ii) $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

g) ESCALAR

EJM: $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$

EN GENERAL
i) $n = m$
ii) $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$
$a_{ij} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

h) IDENTIDAD O UNIDAD

EJM: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

EN GENERAL
i) $n = m$
ii) $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$
y $a_{ij} = 1$

i) IDEMPOTENTE

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & +3 & -2 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

$A^{2020} = A$, $A^2 = A$

j) INVOLUTIVA:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

$A \times A = A^2 = I$

k) NILPOTENTE

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

$A^p = 0$, para algún $p \in \mathbb{N}$
p: índice de nilpotencia (menor posible).

l) PERIÓDICA

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

$A^{n+1} = A$, $n \in \mathbb{Z}^+$
al menor n es el periodo
$A^3 = A$, periodo 2.

m) TRANSPUESTA

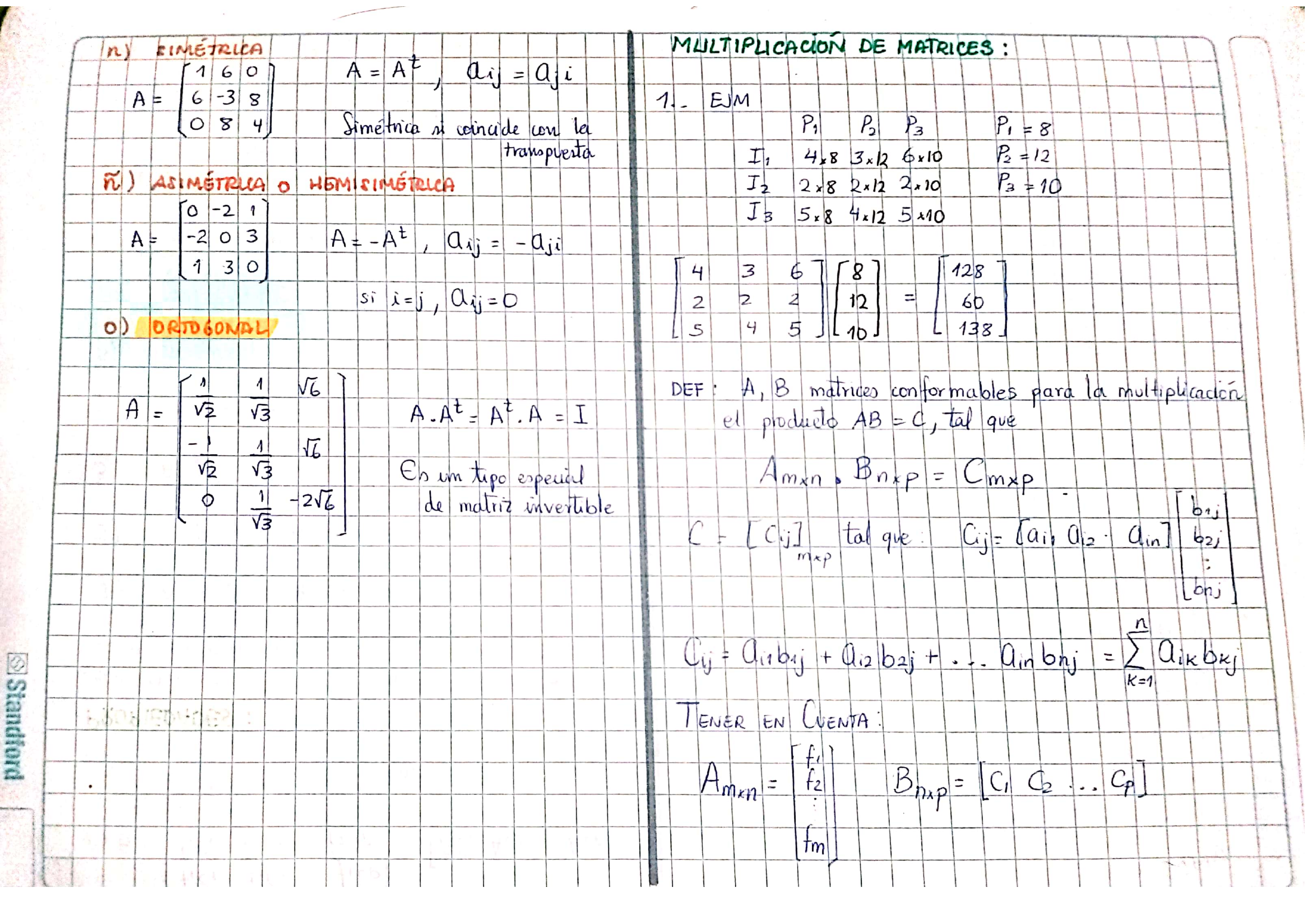
Dada una matriz $A \in M_{m \times n} \Rightarrow A^t$ es la transpuesta de A y $A^t \in M_{n \times m}$, tal que:

$A = [a_{ij}] \qquad A^t = [a^t_{ij}] \;/\; a^t_{ij} = a_{ji}$

EJM: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times2} = A \qquad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$

PROPIEDADES:

1) $(A^t)^t = A$
2) $(A+B)^t = A^t + B^t$
3) $(\lambda A)^t = \lambda . A^t, \; \lambda \in \mathbb{R}$
4) $(AB)^t = B^t . A^t$, siendo $A_{m\times p}$ y $B_{p\times m}$



n) SIMÉTRICA

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 8 \\ 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$A = A^t$, $a_{ij} = a_{ji}$

Simétrica si coincide con la transpuesta

ñ) ASIMÉTRICA O HEMISIMÉTRICA

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$A = -A^t$, $a_{ij} = -a_{ji}$

si $i = j$, $a_{ij} = 0$

o) ORTOGONAL

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{6} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{6} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -2\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$A \cdot A^t = A^t \cdot A = I$

Es un tipo especial de matriz invertible

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES :

1.- EJM

	P_1	P_2	P_3
I_1	4x8	3x12	6x10
I_2	2x8	2x12	2x10
I_3	5x8	4x12	5x10

$P_1 = 8$
$P_2 = 12$
$P_3 = 10$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128 \\ 60 \\ 138 \end{bmatrix}$$

DEF : A, B matrices conformables para la multiplicación el producto $AB = C$, tal que

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

$C = [C_{ij}]_{m \times p}$ tal que : $C_{ij} = [a_{i1}\ a_{i2} \cdots a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

TENER EN CUENTA :

$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$ $B_{n \times p} = [C_1\ C_2 \ldots C_p]$

$$A \times B = \begin{bmatrix} f_1c_1 & f_1c_2 & \cdots & f_1c_p \\ f_2c_1 & f_2c_2 & \cdots & f_2c_p \\ \vdots & & & \\ f_mc_1 & \cdots & \cdots & f_nc_p \end{bmatrix}_{m \times p} = \begin{bmatrix} AC_1 & AC_2 & \cdots & AC_p \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES :

Sean A, B y C matrices conformables para la multiplicación correspondiente:

1) $A.B.C = A.(B.C) = (A.B).C$

2) $A.B \neq B.A$ (NO ES CONMUTATIVA)

3) $A.I = I.A = A$ / I_n y A_n

4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

5) DISTRIBUTIVAS:
   i) $A(B+C) = AB + AC$
   ii) $(A+B)C = AC + BC$

6) $(AB)^t = B^t . A^t$

OBS:
i) Si $AB = AC \Rightarrow$ Si $A \neq 0 \rightarrow B = C$
ii) $AB = 0 \rightarrow A = 0$, $B = 0$.

MATRICES PARTICIONADAS

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

OPERACIONES

a) SUMA : Sean $A, B \in M_{m \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

A_{ij} y B_{ij} tienen el mismo orden

Entonces: $$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & {}_{2} + B_{22} \end{bmatrix}$$

b) MULTIPLICACIÓN : Sean A y B dos matrices conformables para la multiplicación

$A =$ (columnas particionadas en $n_1, n_2, \ldots, n_k$) $_{m \times n}$

$B =$ (filas particionadas en $n_1, n_2, \ldots, n_k$) $_{n \times p}$

EJM:

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{2\;\;4}}^{2}\;\overbrace{\hphantom{6\;\;8\;\;5}}^{3} \\ \left[\begin{array}{cc|ccc} 2 & 4 & 6 & 8 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]_{4\times 5} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{r} 2\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. \\ 3\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array}\!\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]_{5\times 4}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 89 & 12 & \cdots & \cdot \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

OBS: Tener en cuenta que las columnas de A y filas de B deben quedar subdivididas de la misma forma; lo demás de acuerdo al contexto; para que la multiplicación matricial usando particiones.

TRANSPUESTA:

Sea $A = [A_{ij}]$ $(i, j = 1, 2)$; la Transpuesta de A es:

$$A^t = \begin{bmatrix} A_{11}^t & A_{21}^t \\ A_{12}^t & A_{22}^t \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Transformaciones Elementales Fila:

Dada la matriz A de orden $m \times n$ con filas $f_1, f_2, \ldots f_m$ y columnas $C_1, C_2, \ldots C_n$, definimos 3 operaciones elementales:

i) f_{ij}: significa intercambio de la fila i por fila j
ii) $f_i(k)$: significa multiplicar la fila i por un escalar
iii) $f_{ij}(k)$: significa multiplicar la fila j por el escalar k y el resultado sumarlo a la fila i.

Esta última operación se acostumbra denotarla también: $f_i + k f_j$

Las operaciones para las columnas son de manera analoga.

MATRIZ ELEMENTAL:

Resulta de aplicar una operación (transformación) elemental a la matriz identidad (I).

F_i: matriz elemental general de tipo fila
C_j: matriz elemental general de tipo columna.

Las distintas matrices elementales son:

1.- F_{ij} y C_{ij} que resultan de intercambiar en la matriz identidad $I_{n \times n}$ las filas i y j, en el caso de F_{ij}, o las columnas i y j en el caso C_{ij}.

2.- $F_i(k)$ y $C_i(k)$ que resultan de multiplicar en la matriz identidad $I_{n \times n}$ la fila i por el escalar k ($F_i(k)$), o en la columna i por el escalar k ($C_i(k)$).

3.- $F_{ij}(k)$ y $C_{ij}(k)$ que resultan de sumar en la matriz identidad a la fila i la j multiplicada por el escalar k en el caso de $F_{ij}(k)$, o la columna i la j multiplicada por el escalar k, en el caso C_{ij}.

NOTA: La matriz que se obtiene al realizar una transformación elemental en la matriz A de orden $n \times m$ por filas (columna) coincide con la matriz obtenida al multiplicar por la izquierda (derecha) la matriz A por la matriz elemental correspondiente.

MATRICES EQUIVALENTES

Dos matrices A y B, se dice que son equivalentes si una puede obtenerse a la otra mediante transformaciones elementales.

Por tanto, si A y $B \in M_{n \times m}$ son equivalentes, se tiene que:

$$B = F_r \ldots F_2 F_1 A C_1 C_2 \ldots C_s$$

B = PA

siendo $F_1, F_2 \dots F_r$ matrices elementales que representan las transformaciones aplicadas a las filas de A y analogo a las columnas, para así obtener la matriz B.

Entonces si $P = F_r \dots F_2 F_1$ y $Q = C_1 C_2 \dots C_s$ se tiene A y B son equivalentes si y sólo si existen P y Q regulares tales que: $B = PAQ$; P y Q son matrices de paso a paso.

MATRICES SEMEJANTES

Dos matrices A y B cuadradas de orden n son semejantes si existe una matriz P regular tal que: $B = PAP^{-1}$

NOTITA:

Sea una matriz A de orden $m \times n$, luego:

$F_{**}A$, estará dada por cambios en la filas de A
AC_{**}, estará dada por cambios en las columnas de A.

Ahora podemos expresar las afirmaciones anteriores como:

$F_{**}A = (f_{**}I)A = f_{**}(IA) = f_{**}A$, donde $A_{m \times n}, I_{m \times m}$
$AC_{**} = A(C_{**}) = (AI)C_{**} = AC_{**}$, donde $A_{m \times n}, I_{n \times n}$

Dos matrices A y B se denominan equivalentes por fila se denota $A \sim B$, si una de ellas se obtiene de la otra mediante un número finito de transformaciones elementales de fila.

EJM: $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 19/3 \end{bmatrix}$

INVERSA DE UNA OPERACIÓN ELEMENTAL:

La inversa de una operación elemental es otra operación que destruye el efecto de la inicial, reproduciendose de este modo la matriz inicial

Inversa de una matriz elemental:

- La inversa de F_{ij} se denota F_{ij}^{-1} y cumple $F_{ij}^{-1} = F_{ij}$
- La inversa de $F_i(\lambda)$ se denota $F_i^{-1}(\lambda)$ y cumple $F_i^{-1}(\lambda) = F_i\left(\frac{1}{\lambda}\right)$
- La inversa de $F_{ij}(k)$ se denota $F_{ij}^{-1}(k)$ y cumple $F_{ij}^{-1}(k) = F_{ij}(-k)$

Si una matriz B es la matriz escalonada (escalonada reducida por filas) correspondiente a la matriz A, decimos que tiene el mismo rango.

Escaneado con CamScanner

MATRICES ESCALONADAS Y ESCALONADAS REDUCIDAS

Una matriz se llama escalonada por renglones o escalonada si cumple con las siguientes propiedades:

a.- Todos los renglones cero están en la parte inferior de la matriz

b.- El elemento delantero de cada renglón diferente de cero están a la derecha del elemento delantero diferente del renglón anterior.

EJMS:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PIVOT DE UNA FILA :

Pivot de la fila i, es el 1er elemento distinto de cero que se encuentra en la fila i de la matriz

$$[0 \;\ldots\; 0 \;\; a_{i,k} \;\ldots\; a_{i,n}]$$

$a_{i,k} \neq 0$ pivot de la fila i

MATRIZ ESCALONADA REDUCIDA POR FILAS DE UNA MATRIZ:

a.- El primer elemento no nulo (PIVOT) de cada fila es 1

b.- Todas las componentes que se encuentran debajo del pivot de una fila son ceros.

c.- Las filas nulas, si hubieren están por debajo de las filas no nulas.

EJMS:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ INVERSA

Una matriz cuadrada A se dice que es inversible (invertible) si existe una matriz B del mismo orden que A tal que:

$AB = BA = I$

B es la inversa de A, se denotará por $B = A^{-1}$

La matriz inversa es única, ya que si B y C son dos matrices inversas de una misma A, se tiene:

$AB = BA = I \quad , \quad AC = CA = I$

$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$.

Además la inversa de B es A.

PROPIEDADES: Sean A y B matrices inversibles

a.- $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

b.- $(A^{-1})^{-1} = A$

c.- Si $AB = BA = I$ entonces $B = A^{-1}$ $(A = B^{-1})$

d.- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

e.- $(rA)^{-1} = r^{-1}A^{-1}$, $r \neq 0$

f.- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Cálculo de la inversa de una matriz:

$$[A \,\vdots\, I] \xrightarrow{O.E} [I \,\vdots\, A^{-1}]$$

Para encontrar la inversa de una matriz cuadrada A de orden n se parte del esquema $(A \,\vdots\, I_n)$ y a continuación mediante un número finito de operaciones elementales se debe llegar al esquema $(I_n \,\vdots\, A^{-1})$ en caso contrario se dice que no existe A^{-1}.

EJM: Hallar la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

$$F_{31}(-2)A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{32}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{12}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_{23}(-3)]{F_{13}(7)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Tenemos: $F_{23}(-3)\,F_{13}(7)\,F_3(1/2)\,F_{12}(-2)\,F_{32}(1)\,F_{31}(-2)\,A = I$ ... (α)

Despejando: $A^{-1} = F_{23}(-3)\,F_{13}(7)\,F_3(1/2)\,F_{12}(-2)\,F_{32}(1)\,F_{31}(-2)\,I$ ... (β)

Las expresiones (α) y (β) constituyen el fundamento del método de Gauss - Jordan.

Demostración del método de Gauss - Jordan:

Siendo A inversible, tenemos que existe la matriz P $(|P| \neq 0)$ tal que $PA = I$, donde $P = F_i F_{i-1} \ldots F_2 F_1 I$ siendo $F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}, F_i$ matrices elementales fila.

Luego $(A \,\vdots\, I) \xrightarrow{P} (PA \,\vdots\, PI) = (I \,\vdots\, A^{-1})$, con lo cual queda demostrado.

DETERMINANTES

DEFINICIONES

PERMUTACIÓN

EJM: $\{a, b, c\}$ abc acb bac bca cab cba

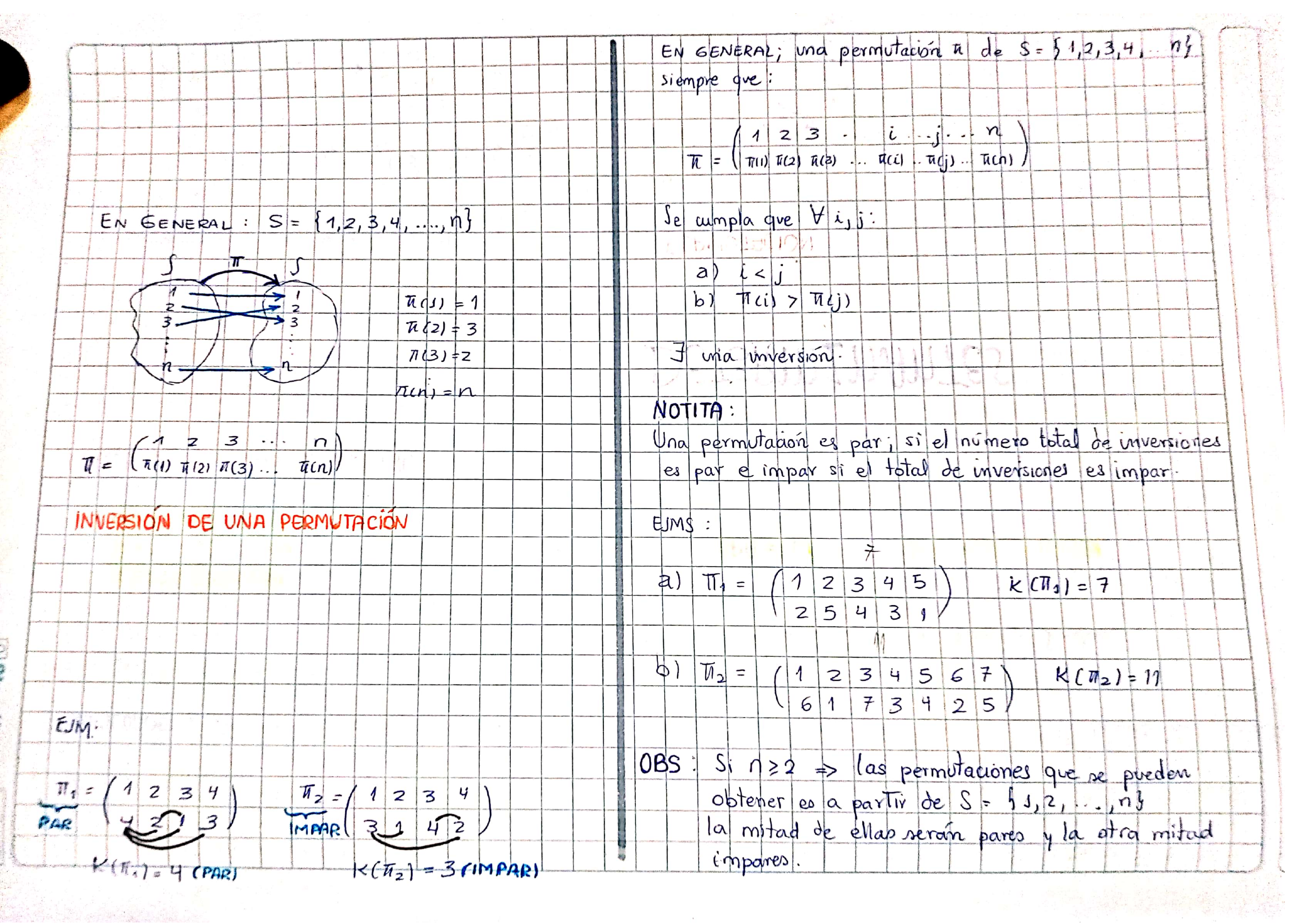
EJM: $S = \{1, 2, 3, 4\}$

S $\xrightarrow{\pi}$ S

1, 2, 3, 4 → 1, 2, 3, 4

$\pi(1) = 3$
$\pi(2) = 1$
$\pi(3) = 4$
$\pi(4) = 2$

EN GENERAL : $S = \{1,2,3,4,\dots,n\}$



$\pi(1) = 1$

$\pi(2) = 3$

$\pi(3) = 2$

$\pi(n) = n$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

INVERSIÓN DE UNA PERMUTACIÓN

EJM:

$$\underbrace{\pi_1}_{\text{PAR}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \underbrace{\pi_2}_{\text{IMPAR}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$K(\pi_1) = 4$ (PAR) $\qquad K(\pi_2) = 3$ (IMPAR)

EN GENERAL; una permutación π de $S = \{1,2,3,4,\dots n\}$ siempre que:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdot & i & \dots & j & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(i) & \dots & \pi(j) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Se cumpla que $\forall\, i,j$:

a) $i < j$

b) $\pi(i) > \pi(j)$

$\exists$ una inversión.

NOTITA:

Una permutación es par; si el número total de inversiones es par e impar si el total de inversiones es impar.

EJMS:

a) $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad K(\pi_1) = 7$

b) $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 7 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\qquad K(\pi_2) = 11$

OBS: Si $n \geq 2 \Rightarrow$ las permutaciones que se pueden obtener es a partir de $S = \{1,2,\dots,n\}$ la mitad de ellas serán pares y la otra mitad impares.

Escaneado con CamScanner

PRODUCTO ELEMENTAL DE UNA MATRIZ:

Sea $A \in M_{n\times n}$ el producto elemental de dicha matriz, es cualquier producto de n elementos de A de los cuales ningún par de elementos proviene de la misma fila o columna

EJM:

a) Si $A \in M_{3\times 3}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) \end{pmatrix}$$

$$a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)}\ a_{3\pi(3)}$$

b) Si $A \in M_{5\times 5}$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) & \pi(5) \end{pmatrix}$$

$$a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)}\ a_{3\pi(3)}\ a_{4\pi(4)}\ a_{5\pi(5)}$$

EN GENERAL:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \cdots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

$$a_{1\pi(1)}\ a_{2\pi(2)}\ a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

TRANSPOSICIÓN ADYACENTE

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad K(\pi_1) = 5 \text{ (IMPAR)}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad K(\pi_2) = 4 \text{ (PAR)}$$

Es el intercambio de dos elementos adyacentes de una permutación.

Si se intercambian dos términos cualesquiera de una permutación sean o no adyacentes, se llama Transposición

CONCLUSIÓN: Una transposición adyacente cambia la paridad de una permutación

ESM:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$K(\pi) = 2 \rightarrow K(\pi_1) = 1 \rightarrow K(\pi_2) = 0$$

TEOREMA :

Si una permutación tiene n inversiones entonces aplicando n transposiciones adyacentes se puede reducir a su orden natural.

SIGNO DE UNA PERMUTACIÓN

$$\text{sgn}(\pi) = (-1)^{K(\pi)} \begin{cases} 1 \; ; \text{ si } K(\pi) \text{ es par} \\ -1 \; ; \text{ si } K(\pi) \text{ es impar} \end{cases}$$

$K(\pi)$: # total de inversiones que tiene la permutación π.

EJM: Determine el signo de las permutaciones :

a) $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ $K(\pi_1) = 4$

$\text{sgn}(\pi_1) = (-1)^4 = 1$

b) $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ $K(\pi_2) = 3$

$\text{sgn}(\pi_2) = (-1)^3 = -1$

DEF :

Sea $A \in M_{n \times n}$; entonces :

$$\det A = \sum_{(S)} \text{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)}\, a_{3\pi(3)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

$$S = \{1, 2, \ldots, n\}$$

EJM: Sea $A \in M_{3\times3}$; calcular su determinante.

$$\det A = \sum_{(S)} \text{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)}\, a_{2\pi(2)}\, a_{3\pi(3)}$$

$S = \{1, 2, 3\}$ $3! = 6$ < PAR (3), IMPAR (3)

$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $K(\pi_1) = 3$ $\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $K(\pi_5) = 2$

$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $K(\pi_2) = 0$ $\pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $K(\pi_6) = 2$

$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $K(\pi_3) = 1$

$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $K(\pi_4) = 1$

$sgn(\pi_1) = (-1)^3 = -1$
$sgn(\pi_2) = (-1)^0 = 1$
$sgn(\pi_3) = (-1)^1 = -1$
$sgn(\pi_4) = (-1)^1 = -1$
$sgn(\pi_5) = (-1)^2 = 1$
$sgn(\pi_6) = (-1)^2 = 1$

$$\det A = \sum_{(S)} sgn(\pi)\, a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)}$$

$S = (1\ 2\ 3) \rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) \end{pmatrix}$

$$\det A = -a_{13} a_{22} a_{31} + a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

EJM: Si $A \in M_{4\times4}$ y $A \in M_{5\times5}$: Calcular al menos 3 términos de sus determinantes.

Sol

$\gamma\ A \in M_{4\times4}$

$$\det A = \sum_{(S)} sgn(\pi)\, a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)} a_{4\pi(4)}$$

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad k(\pi_1) = 3 \quad sgn(\pi_1) = (-1)^3 = -1$

$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad k(\pi_2) = 4 \quad sgn(\pi_2) = +1$

$\pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad k(\pi_3) = 3 \quad sgn(\pi_3) = -1$

$$\det A = -a_{12} a_{24} a_{31} a_{43} + a_{12} a_{24} a_{33} a_{41} - a_{12} a_{23} a_{34} a_{41} \ldots$$

$\gamma\ A \in M_{5\times5}$

$$\det A = \sum_{(S)} sgn(\pi)\, a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)} a_{4\pi(4)} a_{5\pi(5)}$$

OJO!!

$$\det A = +a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} a_{55} - a_{11} a_{22} a_{33} a_{45} a_{54} + a_{11} a_{22} a_{34} a_{45} a_{53} \ldots$$

PROPIEDADES

a) En cada término del desarrollo de una matriz, siempre aparece un de cada fila y un elemento de cada columna.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ } Cuando en una fila o columna todos sus elementos sean 0 el $\det(A) = 0$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 4 \times 1$ } En una matriz triangular superior o inferior $\det(A)$ = multiplicación de elementos de diagonal principal

d) $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ $|B| = \begin{vmatrix} a & b & \lambda c \\ d & e & \lambda f \\ g & h & \lambda i \end{vmatrix}$ → columnas

$|B| = \lambda |A|$ o filas

e) $|\lambda A| = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \\ \lambda c_1 & \lambda c_2 & \lambda c_3 \end{vmatrix}$ $|B = \lambda A|$

$\Rightarrow |B| = \lambda^3 |A|$

f) $|A| = |A^t|$

$A \in M_{3x3} \rightarrow + a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$

$+ a_{31}\ a_{12}\ a_{23}$

g) Si en una matriz cuadrada, se intercambian dos filas su determinante cambia de signo

h) Si en una matriz cuadrada tiene 2 líneas paralelas proporcionales, su determinante es 0.

i) Si se traslada una fila o columna (líneas) k lugares, entonces su determinante queda multiplicado por $(-1)^k$.

EJM:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $|B| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$|B| = (-1)^3 |A|$

j) Si a una línea cualquiera, se le suma un múltiplo escalar de otra línea diferente, entonces su determinante no cambia.

k) $A, B \in M_{nxn} \Rightarrow \det(AB) = (\det A)(\det B)$

l) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+\lambda \\ b_1 & b_2 & b_3+\lambda \\ c_1 & c_2 & c_3+\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & k \\ b_1 & b_2 & k \\ c_1 & c_2 & k \end{vmatrix}$

m) $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

Sabemos que:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

Desarrollo de Laplace:

EJM:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \det(A)$$

$$\boxed{2\times 2}\,\boxed{3\times 3} + \boxed{2\times 2}\,\boxed{3\times 3} + \dots$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}(-1)^{1+2+4+5}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(-1)^{1+4+1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(-1)^{1+4+1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(-1)^{1+4+1+4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}(-1)^{1+4+1+5}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

APLICACIÓN:

(20 × 20 block inside a 100 × 100 matrix)

$$= \sum \boxed{20\times 20}\,(-1)^{+\dots}\,\boxed{100\times 100}$$

ADJUNTA DE UNA MATRIZ

EJM:

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{matrix} \qquad \det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{matrix}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\ldots \quad C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$Adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T$$

EN GENERAL: $Adj(A) = [Cofact(A)]^T$

TEOREMA: Si $A \in M_{n\times n}$

$$\rightarrow A(Adj(A)) = (Adj(A))A = |A| I$$

PRUEBA:

$$(A)Adj(A) = (adj(A))(A) = \det(A) I$$

Sea $A \in M_{n\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad Adj(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{n2} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A(Adj(A)) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \ldots \\ 0 & \det A & 0 \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ & & \det A \end{bmatrix} = \det A \, I_n$$

Consecuencia, sabemos que:

$$(Adj(A))A = (A)(adj(A)) = (\det A)(I_n)$$

Luego: $$\underbrace{\left(\frac{Adj\,A}{\det A}\right)}_{A^{-1}} A = A \underbrace{\left(\frac{Adj\,A}{\det A}\right)}_{A^{-1}} = \left(\frac{\det A}{\det A}\right)(I_n)$$

$\therefore \quad A^{-1} = \dfrac{Adj(A)}{det(A)}$

PROPIEDADES:

1.- $Adj(A) = (A^{-1})\, det(A)$

2.- $|Adj(A)| = (det A)^{n-1}$

PRUEBA: $Adj(A) = (A^{-1})(det A)$

$|Adj(A)| = |(A)^{-1}(det A)|$

$|Adj(A)| = (det A)^{n}\, |A^{-1}|$

$|Adj(A)| = (det(A))^{n} \cdot \dfrac{1}{det(A)}$

$\therefore \quad |Adj(A)| = (det A)^{n-1}$

3.- $Adj(\lambda A) = \lambda^{n-1}\, Adj(A), \quad \lambda \neq 0$

4.- Si $A, B \in M_{n \times n}$

$Adj(AB) = Adj(B) \cdot Adj(A)$

5.- $Adj(Adj(A)) = A\,(det(A))^{n-2}$

6.- $det(adj(Adj(A))) = (det A)^{(n-1)^2}$

7.- $Adj(A^{-1}) = det(A^{-1})A$

8.- $det(Adj\, A^{-1}) = (det A)^{-n+1}$

RANGO DE UNA MATRIZ

EJM:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \ldots \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$

$r(A) = 2$

PROPOSICIÓN: Sabemos $A \sim B \rightarrow r(A) = r(B)$

Luego: $A \sim E_A \rightarrow r(A) = r(E_A)$.

↑ matriz escalonada.

EJM:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(SOLO POR FILAS)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r(A) = r(E_A) = 3$$

MATRIZ EN SU FORMA NATURAL

Es aquella matriz que después de aplicar un número finito de O.E, puede tomar las siguientes formas:

$$\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_r \mid 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_r & \mid & 0 \\ 0 & \mid & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} I_r \end{bmatrix}$$

Siendo su rango r

- Calcular el rango de A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 9 \\ 4 & 8 & -8 & 14 \\ -2 & -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & 9 \\ 4 & 8 & -8 & 14 \\ -2 & -4 & -2 & -4 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(-4),\ F_{31}(2)}{\overset{F_1(1/3)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \overset{F_{32}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} F_2(1/2)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{C_{31}(1),\ C_{41}(-3)}{\overset{C_{21}(-1)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_{34}}{\overset{F_{23}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{F_{42}(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} I_2 & \mid & 0 \\ 0 & \mid & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2$$

EJM: Calcular el rango de A:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$r(A) \rightarrow$ "determinantes" / Escalonada / Normal

i) Determinantes:

a) Calculamos todas las sub-matrices de orden 3 y determinamos los valores de los determinantes de cada una de ellas.

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; \ldots$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; \ldots$

$r(A) = 2$

2) Escalonada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim [E]$$

escalonada por filas

$r(A) = r(E) = r$ (r: número de filas no nulas de E)

3) Forma normal:

$A: \quad [I_r] \quad \begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \quad [I_r \,\vdots\, 0] \quad \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$r(A) = r$

PROPIEDADES:

a) $r(A_{m \times n}) \leq \min(m; n)$

b) $r(A_{m \times n} B_{n \times p}) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

c) $r(AB) = r(AB)^t \quad AB = EF$

d) Las matrices A, BA, AC, BAC siendo B y C no singulares tienen el mismo rango.

producto de matrices elementales

Al hacer operaciones elementales a la matriz A se mantiene su rango.

e) $r(A) = r(A)^t$, $A \in M_{m \times n}$

f) $A, B \in M_{n \times n}$

a) $r(AB) = n \iff r(A) = r(B) = n$

b) $|A| \neq 0 \iff r(A) = n$

c) si $AB = 0 \Rightarrow r(A) + r(B) \leq n$

si 0 entonces $r(A) + r(B) = n$

d) si $A + B = I \Rightarrow r(A) + r(B) \geq n$

g) $A, B \in M_{m \times n} \Rightarrow r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

a) $x + y = 5$

b) $x + y + z = 4$
$x - y + 4z = 12$
$3x + y - z = 5$

c) $x + y = 9$
$x - y = 3$

d) $x + y - 3z = 4$
$x - 2y + z = 5$

En general:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

En forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{2m} & & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{b}$$

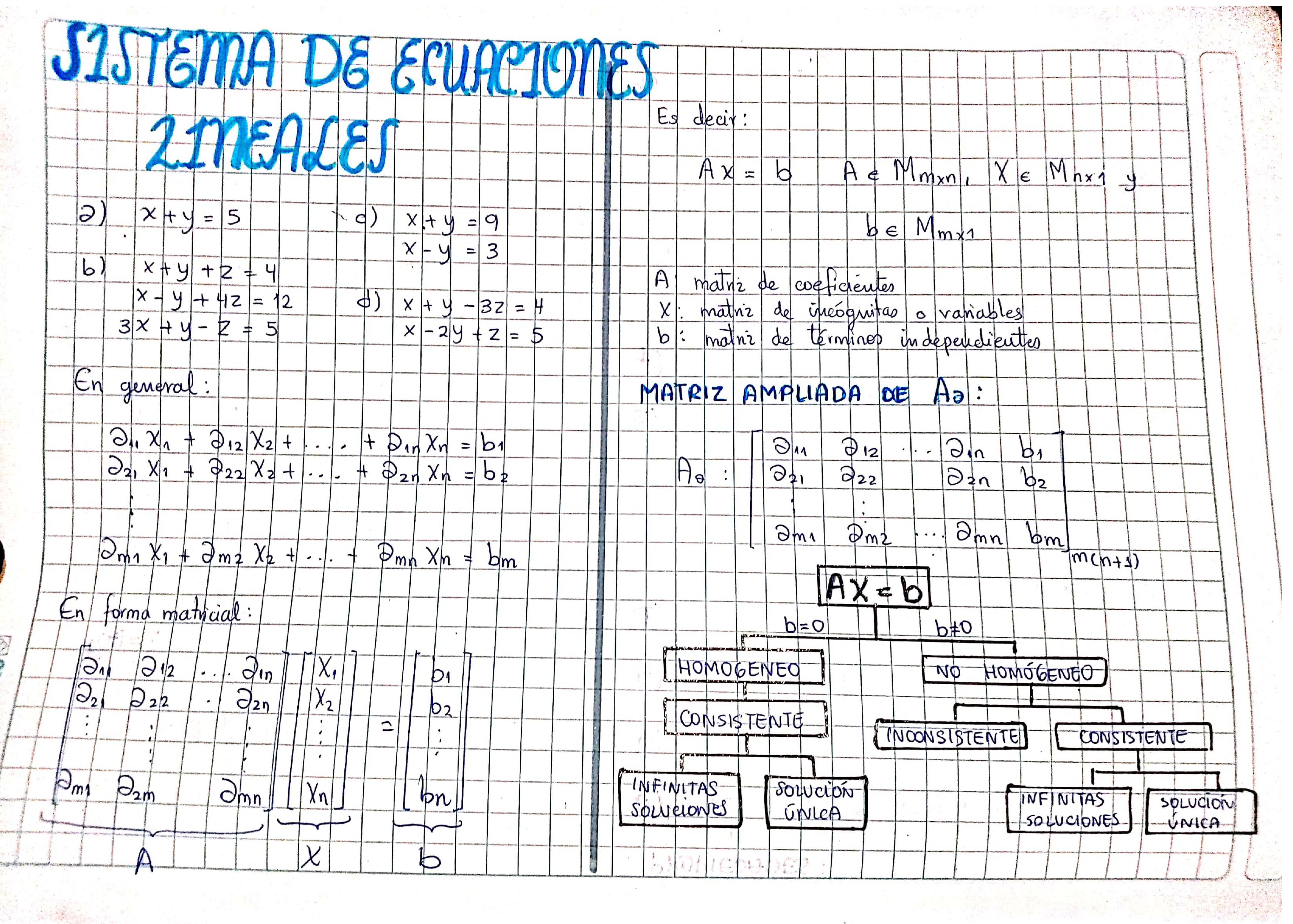
Es decir:

$Ax = b$ $\quad A \in M_{m \times n}$, $X \in M_{n \times 1}$ y $b \in M_{m \times 1}$

A: matriz de coeficientes
X: matriz de incógnitas o variables
b: matriz de términos independientes

MATRIZ AMPLIADA DE A_a:

$$A_a : \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}_{m(n+1)}$$



En forma geométrica

$a_1x+b_1y=c_1$ — $a_2x+b_2y=c_2$ — x_0, y_0

ÚNICA — INFINITA — NINGUNA

CONSISTENCIA — INCONSISTENCIA

SISTEMA DE ECUACIONES EQUIVALENTES

Sean $A, B \in M_{m\times n}$, $X \in M_{n\times 1}$, b_1 y $b_2 \in M_{m\times 1}$, si tenemos:

$$AX = b_1 \ldots (\alpha) \wedge BX = b_2 \ldots (\beta)$$

Dichos sistemas (α) y (β) son equivalentes $\Leftrightarrow$ tienen las mismas soluciones.

EJM: $\left.\begin{array}{l} 4x + y = 12 \\ x + 3y = 5 \end{array}\right\}(\alpha)$ $\left.\begin{array}{l} 12x + 3y = 36 \\ 3x + 9y = 15 \end{array}\right\}(\beta)$

TEOREMA DE ROUCHÉ - FROBENIUS:

Si tenemos: $AX = b$, $A \in M_{m\times n}$, $X \in M_{n\times 1}$, $b \in M_{m\times 1}$

Podemos tener:

a) $r(A_a) = r(A) \Rightarrow \exists$ solución

  i) $r(A_a) = r(A) = n \Rightarrow \exists$ solución única

  ii) $r(A_a) = r(A) = r < n \Rightarrow \exists$ infinitas soluciones que se pueden expresar en función de $(n-r)$ parámetros

b) $r(A_a) \neq r(A) \Rightarrow$ inconsistente ($\nexists$ solución)

EJM: Resolver:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = -6$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 = -18$$

SOL:

$$\underbrace{\left[\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}}_{A}\begin{array}{|c} 2 \\ -6 \\ -18 \end{array}\right]}_{A_a} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -12 \\ 0 & 4 & -2 & -24 \end{array}\right] \sim \underbrace{\left[\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{E_a}\begin{array}{|c} 2 \\ -12 \\ 0 \end{array}\right]}_{EA_a}$$

Luego: $\left.\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_2 - x_3 = -12 \end{array}\right\}$

¿Existe Solución?

- Análisis:

$\left.\begin{array}{l} r(A) = r(E) = 2 \\ r(A_a) = r(E_a) = 2 \end{array}\right\}$ $r(A_a) = r(A) = 2 \rightarrow \exists$ solución pero como $r < 3 \rightarrow \exists$ infinitas soluciones que expresan en función de $(3-2) = 1$ parámetro

- Cálculo de la Solución:

$x_1 - x_2 + x_3 = 2 \rightarrow x_1 = -\frac{t}{2} - 4$

$2x_2 - x_3 = -12 \rightarrow x_2 = \frac{t}{2} - 6$

$x_3 = t$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t/2 - 4 \\ t/2 - 6 \\ t \end{bmatrix}$$

También lo puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{t}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

- Para que valores de a el SEL presenta infinitas soluciones:

$$\begin{aligned} x + y + az &= 3a^2 + 3a \\ x + ay + z &= 2a^2 + 4a \\ ax + y + z &= a^2 + 5a \end{aligned}$$

SOL:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 3a^2 + a \\ 1 & a & 1 & 2a^2 + 4a \\ a & 1 & 1 & a^2 + 5a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 3a^2 + 3a \\ 0 & a-1 & 1-a & -a^2 + a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -2a^2 + 5a - 3a^3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 3a^2 + 3a \\ 0 & a-1 & 1-a & -a^2 + a \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 2 & -3a^2 + 6a - 3a^3 \end{pmatrix}$$

Por condición, como debe existir infinitas soluciones:

$r(A) = r(A_a) = r < 3 \Rightarrow r(E_A) = r(E_{A_a}) = 1 \vee 2$

i) Si el rango es 1: los elementos de la segunda y tercera fila deben ser ceros $\Rightarrow a = 1$

ii) Si el rango es 2, debe cumplirse

$2 - a^2 - a = 0 \wedge -3a^2 + 6a - 3a^3 = 0$

De donde se obtiene que: $\underbrace{a = -2}_{\text{SI CUMPLE}}$ $\boxed{a = 1}$ NO CUMPLE.

SISTEMA HOMOGÉNEO

Se tiene:

$$AX = 0 \;/\; A \in M_{m\times n},\; X_{n\times 1},\; 0 \in M_{m\times 1}$$

Tenemos:

$A_a = [A \vdots 0]$: $\begin{cases} r(A) = r < n \rightarrow \exists \text{ infinitas soluciones} \\ r(A) = n \rightarrow \exists \text{ solución única} \end{cases}$

OBS: En el primer caso las soluciones se expresarán en función de $(n-1)$ parámetros o variables libres.

TENER EN CUENTA:

$AX = 0$, $A \in M_{m\times n}$, $X_{n\times 1}$ y $0 \in M_{m\times 1}$

Si $m = n$: $\begin{cases} |A| = 0 & \exists \text{ infinitas soluciones} \\ |A| \neq 0 & \exists \text{ solución única, la trivial} \end{cases}$

Si $m < n$ El SEL homogéneo tiene infinitas soluciones.

EJM: Determinar el valor de k, de modo que el SEL homogéneo tenga soluciones distintas a la trivial

$$\begin{aligned} x + 2ky - kz &= y \\ 3x + (k+1)y - 2z &= kx \\ x + ky - z &= 0 \end{aligned}$$

OJO: $[A][X] = [0]$: $|A| \neq 0$ solución única; $|A| = 0$ infinitas soluciones.

$$A_a = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2k-1 & -k & 0 \\ 3-k & k+1 & -2 & 0 \\ 1 & k & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow k^3 - 4k^2 + 5k - 2 = 0$$

$$(k-1)^2(k-2) = 0$$

$$k = 1 \wedge k = 2$$

∴ El SEL presenta infinitas soluciones si $k = 1$ ∨ $k = 2$.

RELACIÓN ENTRE EL SEL $AX = b$ Y SU SISTEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO $AX = 0$

EJM: SISTEMA NO HOMOGÉNEO:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 &= 1 \end{aligned}\right\} (I)$$

SISTEMA HOMOGÉNEO:

SISTEMA HOMOGÉNEO ASOCIADO

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}\right\} (II)$$

Escaneado con CamScanner

Luego:

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{31}(-1)}{\overset{F_{21}(1)}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{F_{12}(2)}{\overset{F_{32}(-3)}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & -1 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{array}\right] \overset{F_3(\frac{1}{2})}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & -1 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 3 \end{array}\right] \underset{F_{23}(-1)}{\overset{F_{13}(1)}{\sim}}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Cálculo de la solución del sistema homogéneo.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ x_2 + 0 + 2x_4 = 0 \\ x_3 + 7x_4 = 0 \end{array}\right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2t \\ -7t \\ t \end{bmatrix}$$

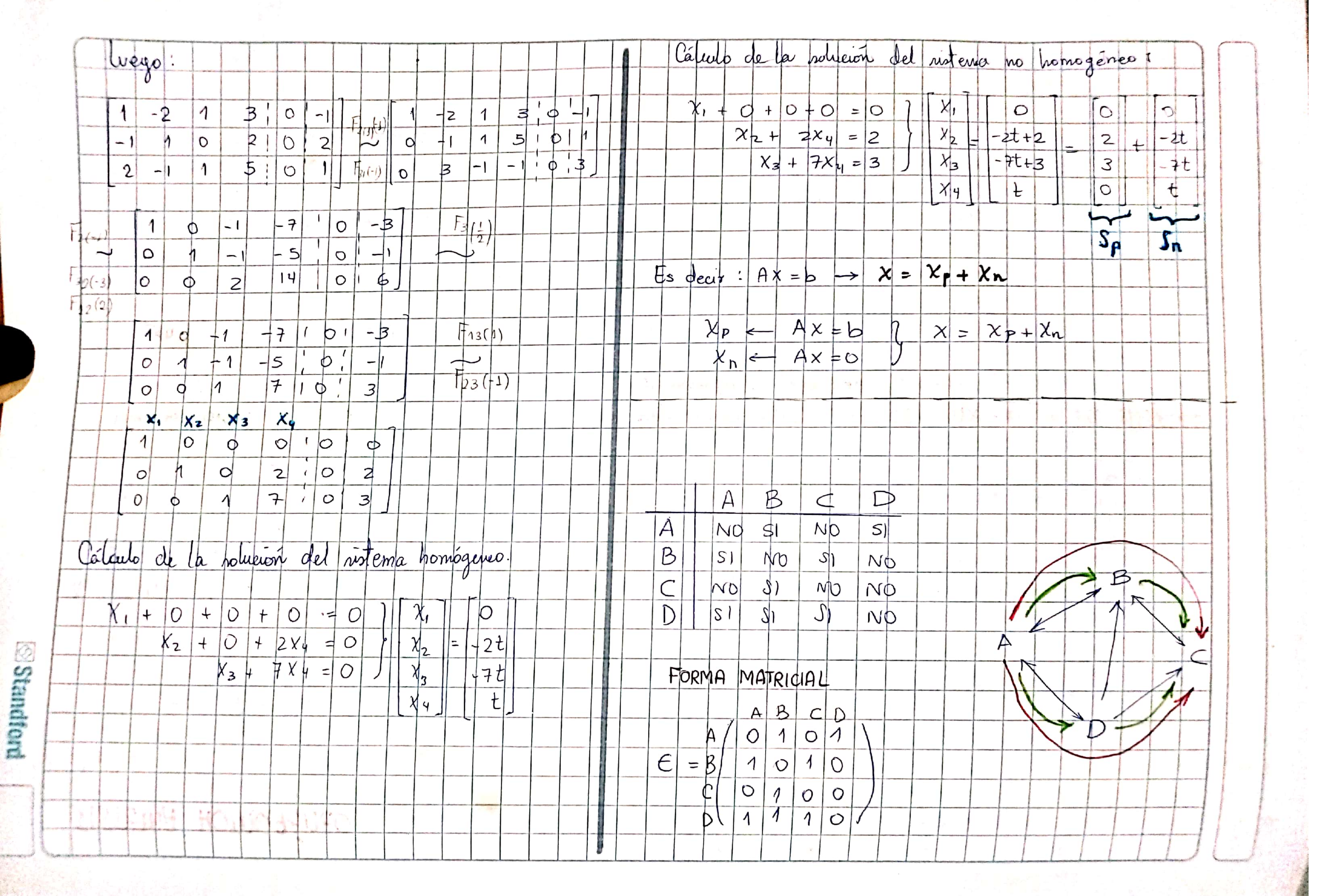
Cálculo de la solución del sistema no homogéneo:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ x_2 + 2x_4 = 2 \\ x_3 + 7x_4 = 3 \end{array}\right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2t+2 \\ -7t+3 \\ t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{S_p} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2t \\ -7t \\ t \end{bmatrix}}_{S_n}$$

Es decir: $Ax = b \rightarrow \mathbf{x = x_p + x_n}$

$$\left.\begin{array}{l} x_p \leftarrow Ax = b \\ x_n \leftarrow Ax = 0 \end{array}\right\} \quad x = x_p + x_n$$

	A	B	C	D
A	NO	SI	NO	SI
B	SI	NO	SI	NO
C	NO	SI	NO	NO
D	SI	SI	SI	NO



FORMA MATRICIAL

$$E = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculo de ϵ^2:

$$\epsilon^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad a_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \times 1 + 1 \times 1 = 2$$

a_{13}: significa que existen dos rutas de dimensión 2; para unir A con C.

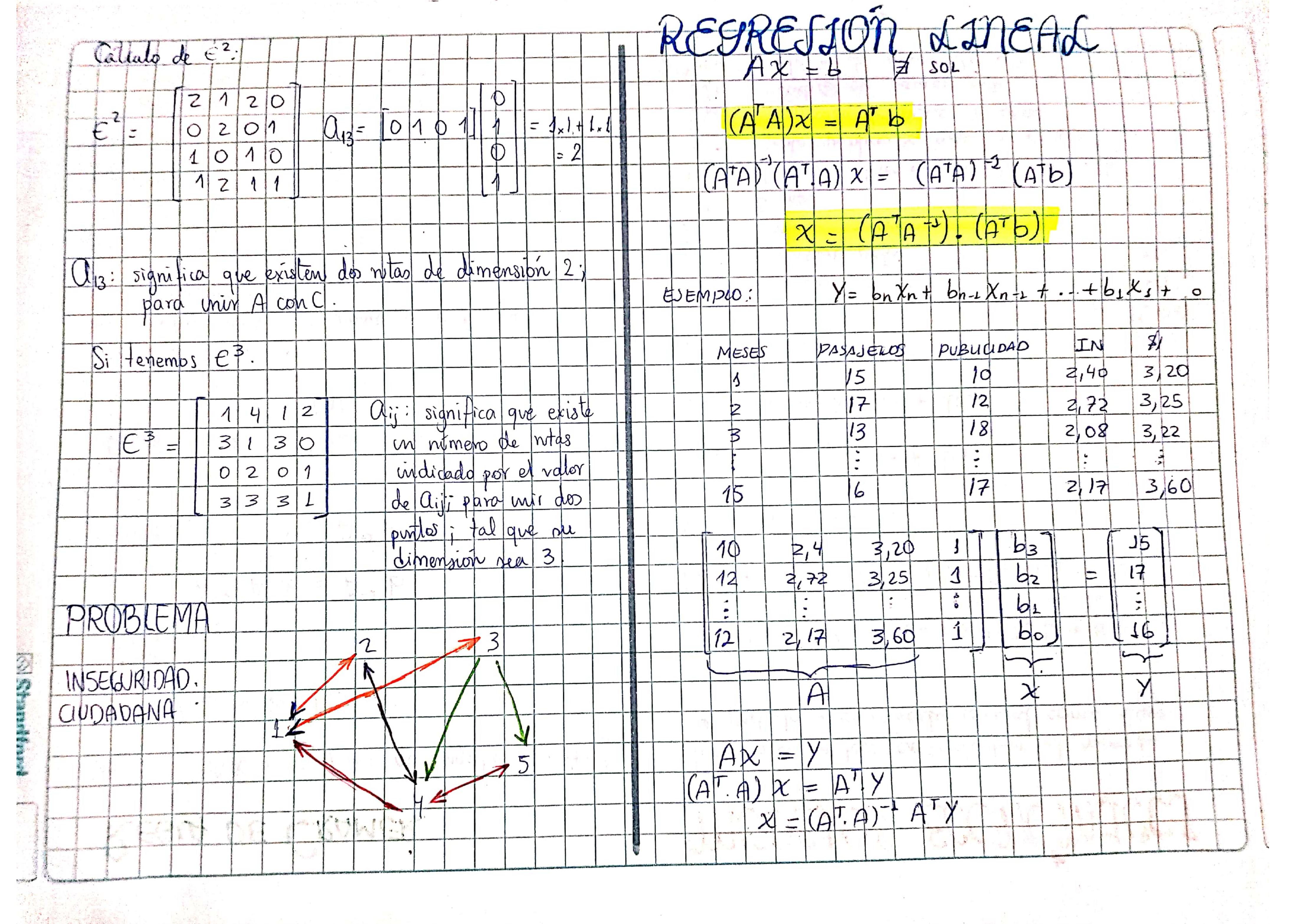
Si tenemos ϵ^3.

$$\epsilon^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

a_{ij}: significa que existe un número de rutas indicado por el valor de a_{ij} para unir dos puntos; tal que su dimensión sea 3.

PROBLEMA

INSEGURIDAD CIUDADANA:



REGRESIÓN LINEAL

$Ax = b$ ∄ SOL

$(A^T A)x = A^T b$

$(A^T A)^{-1}(A^T A)\,x = (A^T A)^{-1}(A^T b)$

$x = (A^T A^{-1}) \cdot (A^T b)$

EJEMPLO: $Y = b_n X_n + b_{n-1} X_{n-1} + \dots + b_1 x_1 + 0$

MESES	PASAJEROS	PUBLICIDAD	IN	$
1	15	10	2,40	3,20
2	17	12	2,72	3,25
3	13	18	2,08	3,22
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
15	6	17	2,17	3,60

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 2,4 & 3,20 & 1 \\ 12 & 2,72 & 3,25 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 12 & 2,17 & 3,60 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 15 \\ 17 \\ \vdots \\ 16 \end{bmatrix}}_{Y}$$

$Ax = Y$

$(A^T \cdot A)\,x = A^T Y$

$x = (A^T \cdot A)^{-1} A^T Y$

Regla de Cramer

Sea: $Ax = b$ / A: no singular y $A \in M_{n \times n}$

$x \in M_{n \times 1}$ y $b \in M_{n \times 1}$

Entonces

$$A^{-1} \cdot A x = A^{-1} b$$

$$x = A^{-1} b$$

Donde: $x_k = \dfrac{|A_k|}{|A|}$; $k = 1, 2, 3, \ldots n$

A_k: matriz donde la columna k de A ; se reemplaza por b.

Modelos Económicos

Tenemos un modelo que considera el mercado de producto y el mercado laboral como sigue:

$$C_T = \alpha_0 + \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 C_{T-1} + \alpha_2 t + u_{2t}$$

$$I_T = \beta_0 + \beta_1 (C_T - C_{T-1}) - \beta_2 r_{T-1} + u_{2T}$$

$$Y_T = C_T + I_T + G_T$$

$$D_{MT} = \gamma_0 - \gamma_1 W_T + u_{3T}$$

$$S_{MT} = \lambda_0 + \lambda_1 W_T + u_{4T}$$

$$D_{MT} = S_{MT}$$

$0 < \alpha_1 < 1$

$0 < \alpha_2 < 1$

$\beta_1, \beta_2 > 0$

$\gamma_1 > 0$

$\lambda_1 > 0$

C_T : consumo nacional

I_T : inversión neta

Y_T : ingreso nacional

T : tiempo

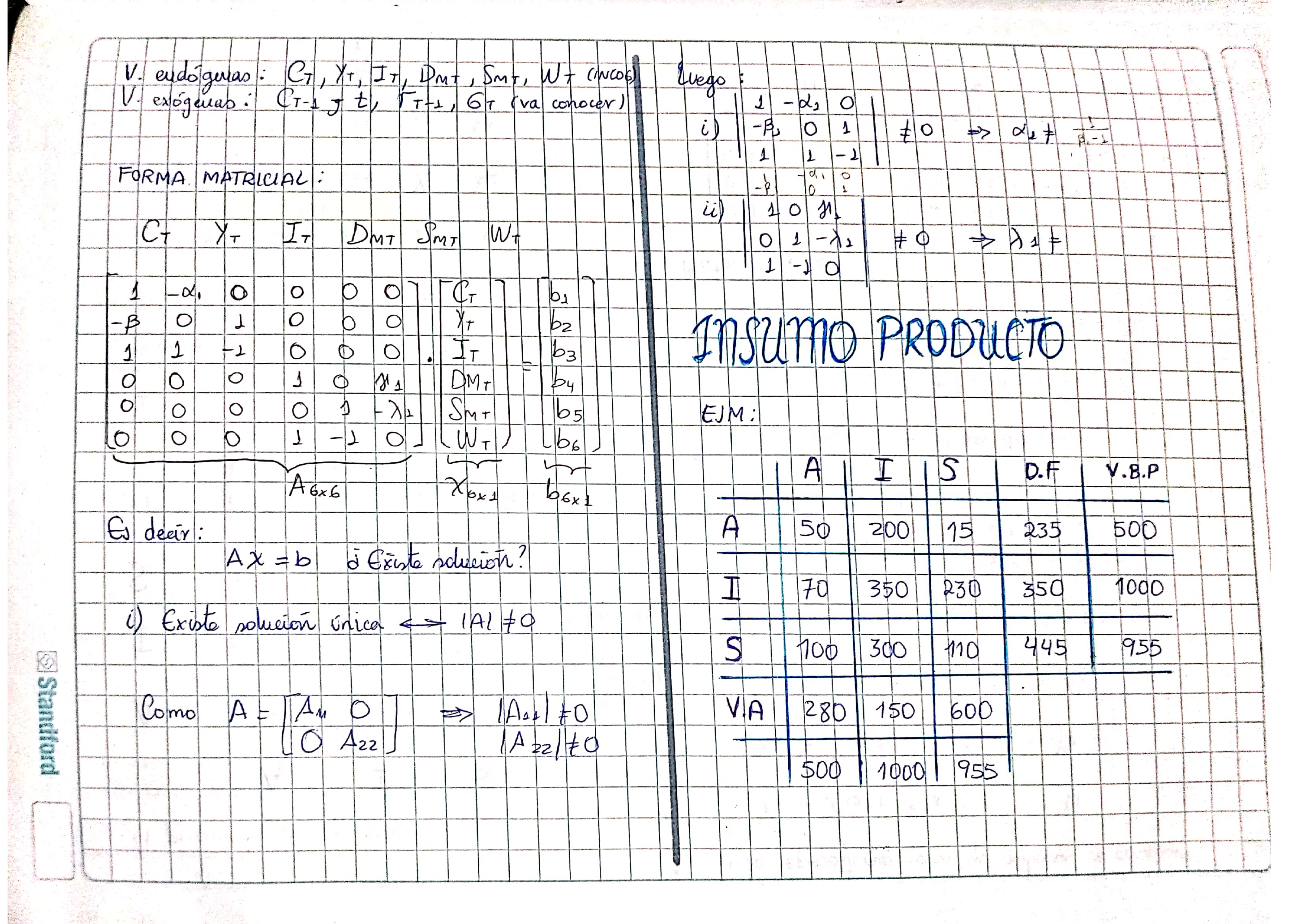
r_{T-1} : tasa de interés del período precedente

G_T : gastos públicos de bienes y servicios

D_{MT} : demanda de mano de obra

W_T : índice de salarios neta

S_{MT} : oferta de mano de obra



V. endógenas: $C_T, Y_T, I_T, D_{MT}, S_{MT}, W_T$ (incog)
V. exógenas: C_{T-1} y t, r_{T-1}, G_T (va conocer)

FORMA MATRICIAL:

$$\begin{array}{cccccc} C_T & Y_T & I_T & D_{MT} & S_{MT} & W_T \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{6\times6}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} C_T \\ Y_T \\ I_T \\ DM_T \\ SM_T \\ W_T \end{bmatrix}}_{X_{6\times1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix}}_{b_{6\times1}}$$

Es decir:

$Ax = b$ ¿Existe solución?

i) Existe solución única $\Longleftrightarrow |A| \neq 0$

Como $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} |A_{11}| \neq 0 \\ |A_{22}| \neq 0 \end{array}$

Luego:

i) $\begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 \neq \frac{1}{\beta_1 - 1}$

$\begin{matrix} 1 & -\alpha_1 & 0 \\ -\beta & 0 & 1 \end{matrix}$

ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq$

INSUMO PRODUCTO

EJM:

	A	I	S	D.F	V.B.P
A	50	200	15	235	500
I	70	350	230	350	1000
S	100	300	110	445	955
V.A	280	150	600		
	500	1000	955		

Escaneado con CamScanner

$F_2^{-1}(-1) = F_2(-1)$ 0,10

A partir de ésta formación:

	A	I	S
A	$\frac{50}{500}=0{,}10$	$\frac{200}{1000}=0{,}2$	$\frac{15}{955}=0{,}02$
I	$\frac{70}{500}=0{,}14$	$\frac{350}{1000}=0{,}35$	$\frac{230}{955}=0{,}24$
S	$\frac{100}{500}=0{,}20$	$\frac{300}{1000}=0{,}30$	$\frac{110}{955}=0{,}12$

$\frac{X_{11}}{X_1}=a_{11}$

$\frac{X_{32}}{X_2}=a_{32}$

$a_{ij} = \frac{X_{ij}}{X_j}$

a_{ij}: coeficiente técnico
i: indica el sector que vende
j: al que produce

Teniendo en cuenta los 3 sectores:

	S_1	S_2	S_3	DF	VBP
S_1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	Y_1	X_1
	X_{21}	X_{22}	X_{23}	Y_2	X_2
	X_{31}	X_{32}	X_{33}	Y_3	X_3
	VA_1	VA_2	VA_3		
VBP	X_1	X_2	X_3		

Si lo representamos como un sistema de ecuaciones:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + Y_1 = X_1$$

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + Y_2 = X_2$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + Y_3 = X_3$$

Este sistema también lo podemos expresar como:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + Y_1 = X_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + Y_2 = X_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 + Y_3 = X_3$$

Si reemplazamos los resultados del ejemplo, resulta:

$$0{,}10X_1 + 0{,}20X_2 + 0{,}02X_3 + Y_1 = X_1$$
$$0{,}14X_1 + 0{,}35X_2 + 0{,}24X_3 + Y_2 = X_2$$
$$0{,}20X_1 + 0{,}30X_2 + 0{,}12X_3 + Y_3 = X_3$$

Matricialmente:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}20 & 0{,}02 \\ 0{,}14 & 0{,}35 & 0{,}24 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}12 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}}_{X}$$

Es decir:

$$AX + Y = X$$

$$Y = X - AX \rightarrow Y = (I-A)X$$

$$X = (I-A)^{-1} Y$$

$(I-A)$: matriz de Leontief

$(I-A)^{-1}$: matriz de coeficientes directos e indirectos

A: matriz de coeficientes técnicos

Para los valores de nuestro ejemplo, determinar el VBP de los tres sectores, si la manda final fuera $[700 \quad 500 \quad 1000]^T$.

Tenemos que:

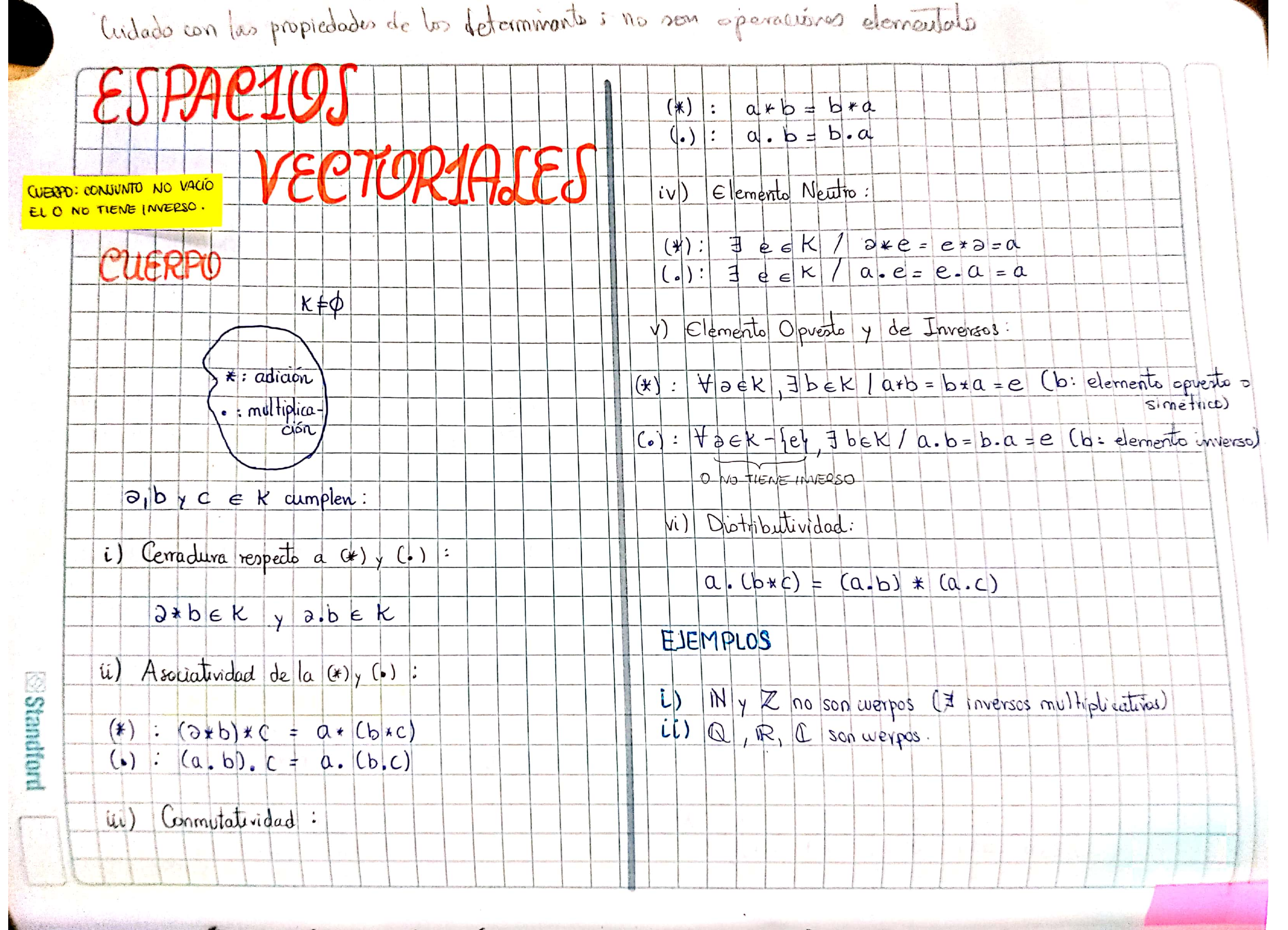
$$A = \begin{bmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,02 \\ 0,14 & 0,35 & 0,24 \\ 0,20 & 0,30 & 0,12 \end{bmatrix}$$

Se tiene que: $X = (I-A)^{-1} Y$

$$X = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,10 & 0,20 & 0,02 \\ 0,14 & 0,35 & 0,04 \\ 0,20 & 0,30 & 0,02 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0,90 & -0,20 & -0,02 \\ -0,14 & 0,65 & -0,24 \\ -0,20 & -0,30 & 0,88 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1,21 & 0,44 & 0,14 \\ 0,41 & 1,91 & 0,53 \\ 0,41 & 0,75 & 1,35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 700 \\ 500 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1207 \\ 1772 \\ 2012 \end{bmatrix}$$



Cuidado con las propiedades de los determinantes ; no son operaciones elementales

ESPACIOS VECTORIALES

CUERPO: CONJUNTO NO VACÍO
EL 0 NO TIENE INVERSO.

CUERPO

$K \neq \emptyset$

$*$: adición
$\cdot$: multiplicación

a, b y $c \in K$ cumplen :

i) Cerradura respecto a $(*)$ y $(\cdot)$:

$a * b \in K$ y $a . b \in K$

ii) Asociatividad de la $(*)$ y $(\cdot)$:

$(*)$: $(a * b) * c = a * (b * c)$
$(\cdot)$: $(a . b) . c = a . (b . c)$

iii) Conmutatividad :

$(*)$: $a * b = b * a$
$(\cdot)$: $a . b = b . a$

iv) Elemento Neutro :

$(*)$: $\exists\ e \in K \ /\ a * e = e * a = a$
$(\cdot)$: $\exists\ e \in K \ /\ a . e = e . a = a$

v) Elemento Opuesto y de Inversos :

$(*)$: $\forall a \in K, \exists b \in K \ /\ a * b = b * a = e$ (b: elemento opuesto o simétrico)

$(\cdot)$: $\forall a \in K - \{e\}, \exists b \in K \ /\ a . b = b . a = e$ (b: elemento inverso)

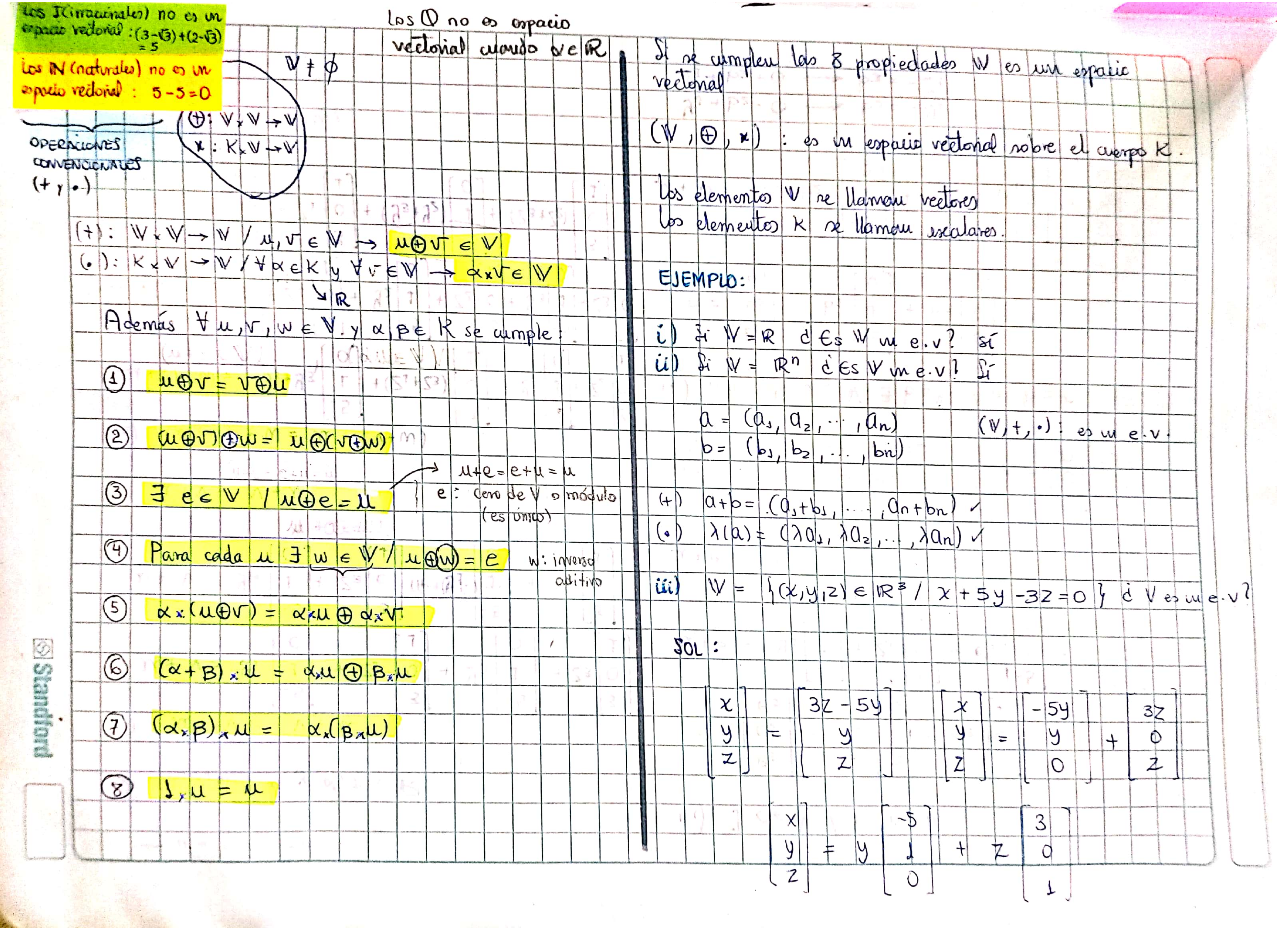
0 NO TIENE INVERSO

vi) Distributividad:

$a . (b * c) = (a . b) * (a . c)$

EJEMPLOS

i) $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ no son cuerpos ($\nexists$ inversos multiplicativos)
ii) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ son cuerpos.



Los $\mathbb{I}$ (irracionales) no es un espacio vectorial: $(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3}) = 5$

Los $\mathbb{N}$ (naturales) no es un espacio vectorial: $5-5=0$

Los $\mathbb{Q}$ no es espacio vectorial cuando $\alpha \in \mathbb{R}$

$\mathbb{V} \neq \phi$

$\oplus : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$
$\times : K \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

OPERACIONES CONVENCIONALES $(+ \; y \; \cdot)$

$(+): \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} \;/\; u, v \in \mathbb{V} \to u \oplus v \in \mathbb{V}$

$(\cdot): K \times \mathbb{V} \to \mathbb{V} \;/\; \forall \alpha \in K \; y \; \forall v \in \mathbb{V} \to \alpha \times v \in \mathbb{V}$ ($K \to \mathbb{R}$)

Además $\forall u, v, w \in \mathbb{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple:

① $u \oplus v = v \oplus u$

② $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$

③ $\exists \; e \in \mathbb{V} \;/\; u \oplus e = u$ → $u+e = e+u = u$; e: cero de $\mathbb{V}$ o módulo (es único)

④ Para cada $u \; \exists \; w \in \mathbb{V} \;/\; u \oplus w = e$ — w: inverso aditivo

⑤ $\alpha \times (u \oplus v) = \alpha \times u \oplus \alpha \times v$

⑥ $(\alpha + \beta) \times u = \alpha \times u \oplus \beta \times u$

⑦ $(\alpha \times \beta) \times u = \alpha \times (\beta \times u)$

⑧ $1 \times u = u$

Si se cumplen las 8 propiedades $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial

$(\mathbb{V}, \oplus, \times)$: es un espacio vectorial sobre el cuerpo K.

Los elementos $\mathbb{V}$ se llaman vectores
Los elementos K se llaman escalares.

EJEMPLO:

i) Si $\mathbb{V} = \mathbb{R}$ ¿Es $\mathbb{V}$ un e.v? sí

ii) Si $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ ¿Es $\mathbb{V}$ un e.v? Sí

$a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$(\mathbb{V}, +, \cdot)$: es un e.v.

(+) $a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ ✓

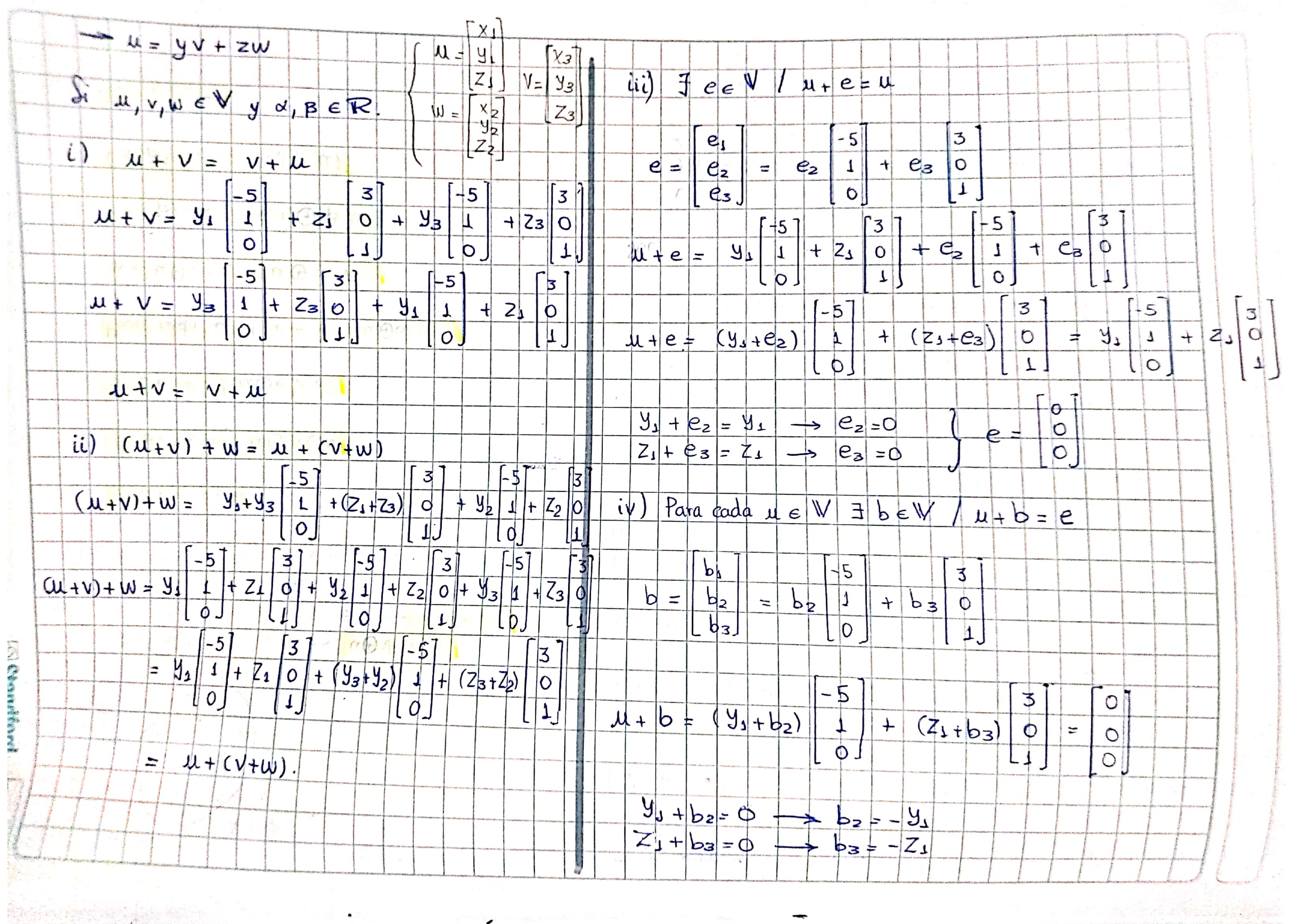
(·) $\lambda(a) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$ ✓

iii) $\mathbb{V} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x + 5y - 3z = 0\}$ ¿$\mathbb{V}$ es un e.v?

SOL:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3z - 5y \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3z \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$\rightarrow u = yv + zw$

Si $u, v, w \in \mathbb{V}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

i) $u + v = v + u$

$$u + v = y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + v = y_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u + v = v + u$

ii) $(u+v) + w = u + (v+w)$

$$(u+v)+w = y_1+y_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (z_1+z_3) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(u+v)+w = y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (y_3+y_2) \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (z_3+z_2) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$= u + (v+w)$.

iii) $\exists\, e \in \mathbb{V} \,/\, u + e = u$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = e_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + e = y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + e = (y_1+e_2) \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (z_1+e_3) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$y_1 + e_2 = y_1 \rightarrow e_2 = 0$

$z_1 + e_3 = z_1 \rightarrow e_3 = 0$

$\Big\}\; e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

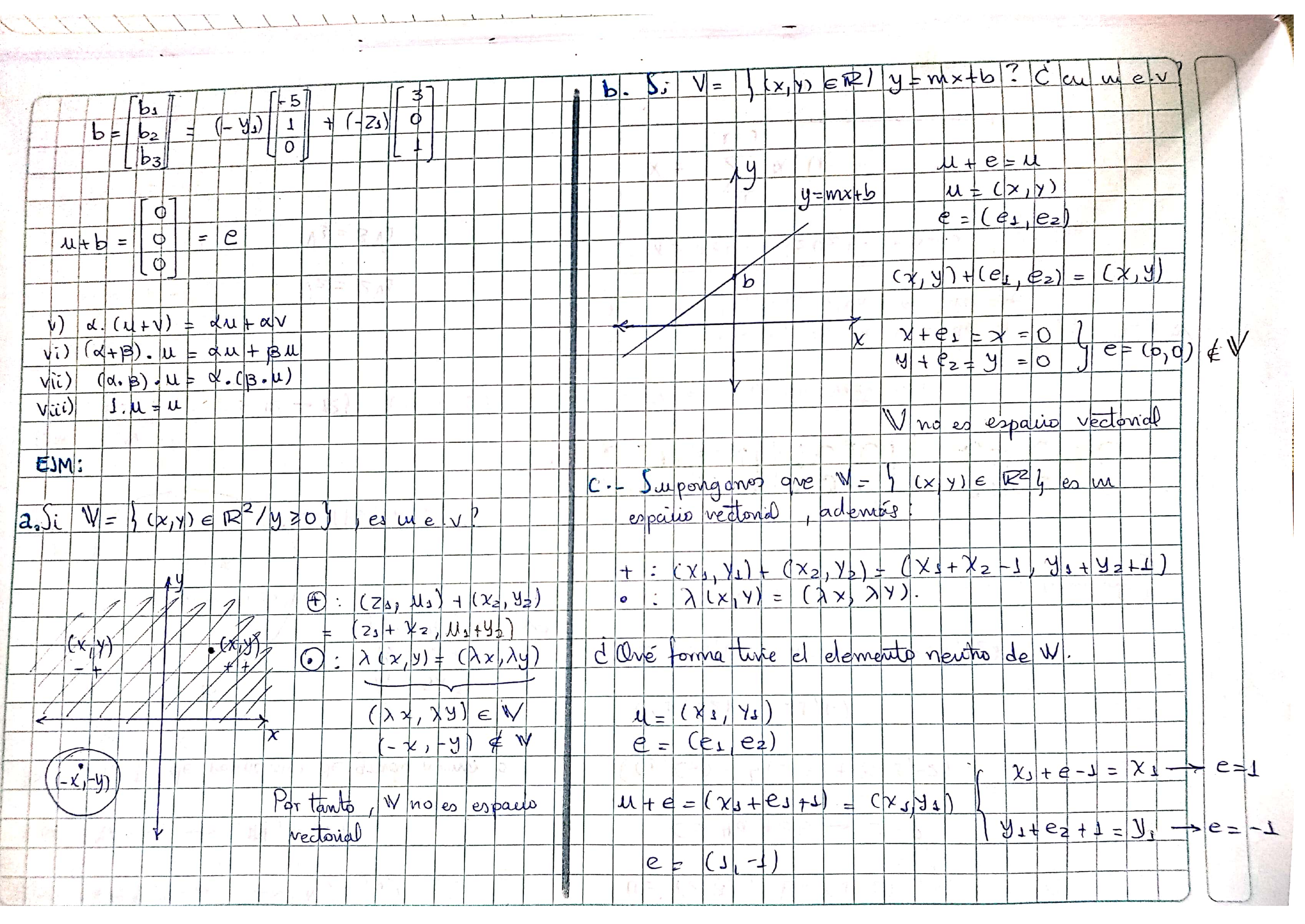
iv) Para cada $u \in \mathbb{V}\ \exists\, b \in \mathbb{V} \,/\, u + b = e$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = b_2 \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + b = (y_1+b_2) \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (z_1+b_3) \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$y_1 + b_2 = 0 \rightarrow b_2 = -y_1$

$z_1 + b_3 = 0 \rightarrow b_3 = -z_1$



$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = (-y_1)\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-z_1)\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e$$

v) $\alpha.(u+v) = \alpha u + \alpha v$

vi) $(\alpha+\beta).u = \alpha u + \beta u$

vii) $(\alpha.\beta).u = \alpha.(\beta.u)$

viii) $1.u = u$

EJM:

a. Si $\mathbb{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$, ¿es un e.v?

$\oplus$: $(z_1, u_1) + (x_2, y_2)$
$= (z_1 + x_2, u_1 + y_2)$

$\odot$: $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$

$(\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{V}$

$(-x, -y) \notin \mathbb{V}$

Por tanto, $\mathbb{V}$ no es espacio vectorial

b. Si $\mathbb{V} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = mx + b\}$? ¿es un e.v?

$u + e = u$

$u = (x,y)$

$e = (e_1, e_2)$

$(x,y) + (e_1, e_2) = (x,y)$

$\left.\begin{array}{l} x + e_1 = x = 0 \\ y + e_2 = y = 0 \end{array}\right\} e = (0,0) \notin \mathbb{V}$

$\mathbb{V}$ no es espacio vectorial

c.- Supongamos que $\mathbb{W} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ es un espacio vectorial, además:

$+$: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2 + 1)$

$\circ$: $\lambda(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$.

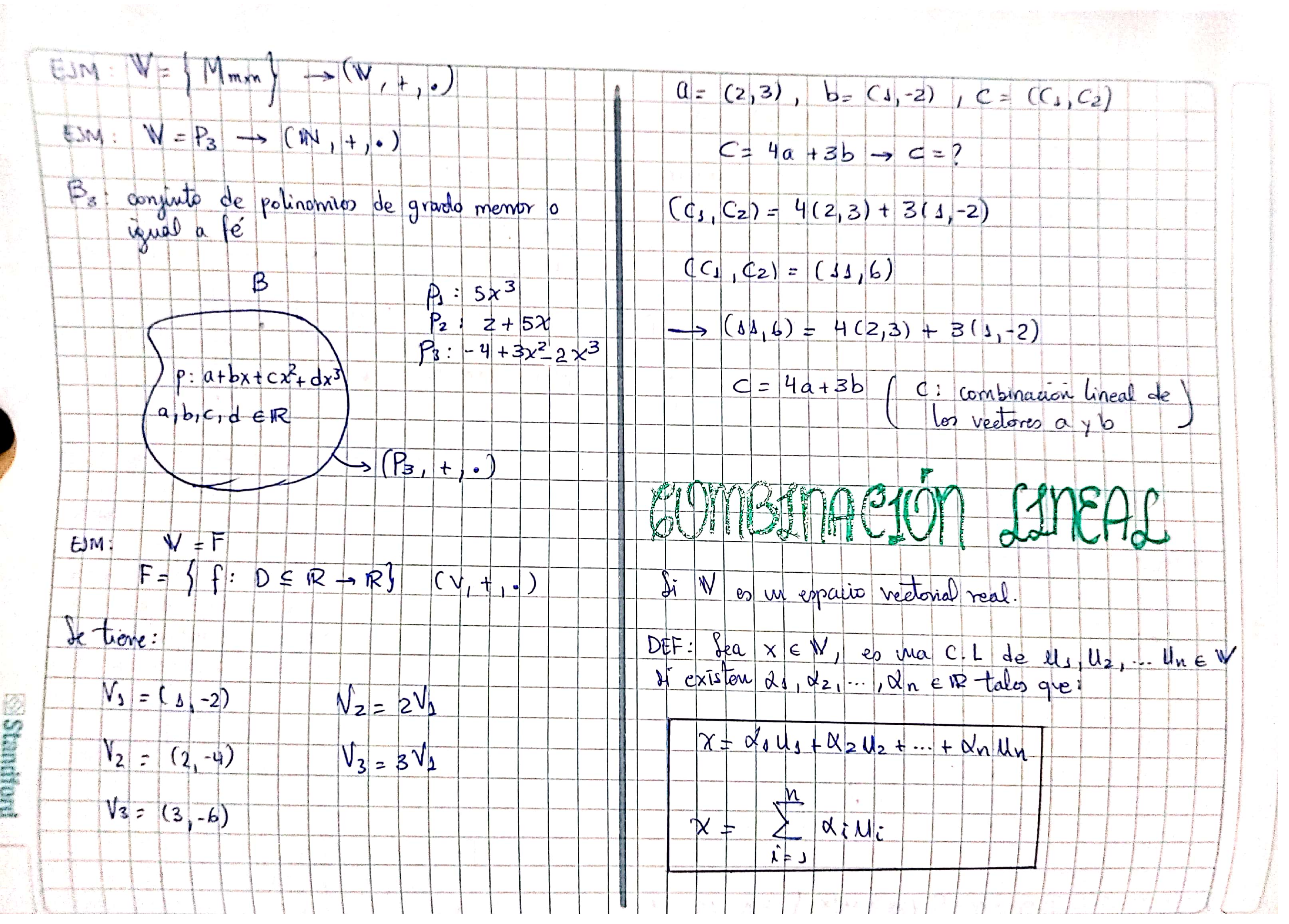
¿Qué forma tiene el elemento neutro de $\mathbb{W}$.

$u = (x_1, y_1)$

$e = (e_1, e_2)$

$u + e = (x_1 + e_1 + 1) = (x_1, y_1)$ $\left\{\begin{array}{l} x_1 + e - 1 = x_1 \rightarrow e = 1 \\ y_1 + e_2 + 1 = y_1 \rightarrow e = -1 \end{array}\right.$

$e = (1, -1)$



EJM: $\mathbb{V} = \{M_{m \times n}\} \rightarrow (\mathbb{V}, +, \cdot)$

EJM: $\mathbb{V} = P_3 \rightarrow (\mathbb{N}, +, \cdot)$

B_3: conjunto de polinomios de grado menor o igual a 3

B

$p: a + bx + cx^2 + dx^3$
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$\rightarrow (P_3, +, \cdot)$

$P_1: 5x^3$
$P_2: 2 + 5x$
$P_3: -4 + 3x^2 - 2x^3$

EJM: $\mathbb{V} = F$

$F = \{f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ $(V, +, \cdot)$

Se tiene:

$V_1 = (1, -2)$ $\quad V_2 = 2V_1$

$V_2 = (2, -4)$ $\quad V_3 = 3V_1$

$V_3 = (3, -6)$

$a = (2,3)$, $b = (1,-2)$, $c = (c_1, c_2)$

$c = 4a + 3b \rightarrow c = ?$

$(c_1, c_2) = 4(2,3) + 3(1,-2)$

$(c_1, c_2) = (11, 6)$

$\rightarrow (11, 6) = 4(2,3) + 3(1,-2)$

$c = 4a + 3b$ (c: combinación lineal de los vectores a y b)

COMBINACIÓN LINEAL

Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial real.

DEF: Sea $x \in \mathbb{V}$, es una C.L de $u_1, u_2, \ldots u_n \in \mathbb{V}$ si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

EJM: $a=(2,4)$, $b=(1,-3)$ y $c=(3,1)$

¿Es el vector a una C.L de los vectores b y c?

$$a = rb + tc \,,\; r,t \in \mathbb{R}$$

$$(2,4) = r(1,-3) + t(3,1)$$

$$\left.\begin{aligned} r + 3t &= 2 \\ -3r + t &= 4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} r &= -1 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

∴ a es una C.L de los vectores b y c.

EJM: $a=(2,1,1)$, $b=(1,0,0)$ y $c=(2,2,0)$

¿Es el vector a una combinación lineal de los vectores b y c?

Luego: $a = \alpha_1 b + \alpha_2 c$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$(2,1,1) = \alpha_1 (1,0,0) + \alpha_2 (2,2,0)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 &= 2 \\ 0\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 1 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{aligned} r(A) &= 2 \\ r(A_a) &= 3 \end{aligned}$$

$r(A) \neq r(A_a)$

$\nexists$ solución

∴ a no es combinación lineal b y c

EJM: Tenemos $p: x^2+1$, $p_1 = x^3 + x - 1$, $p_2: x+2$, $p_3 = 1$

$$p, p_1, p_2, p_3 \in P_3$$

¿Es el vector p una C.L de p_1, p_2, p_3?

$$p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$$

$$(1,0,1,0) = \alpha_1 (-1,1,0,1) + \alpha_2 (2,1,0,0) + \alpha_3 (1,0,0,0)$$

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 &= 1 \\ \alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} r(A) &= 3 \\ r(A_a) &= 4 \end{aligned}\right\} \; r(A) \neq r(A_a) \Rightarrow \nexists \text{ solución}$$

∴ p no es una C.L de p_1, p_2 y p_3.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL:

Sea $\{V_1, V_2, ... V_k\} \subset \mathbb{V}$ dicho conjunto es L.D. $\Leftrightarrow$ existen $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{R}$ tal que:

$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + ... \alpha_k V_k = 0$ y no trivial, es

decir que al menos un coeficiente real es distinto de cero. Pero si la combinación lineal es nula y trivial el conjunto de vectores es L.I.

∴ Si tenemos $\{V_1, V_2, V_3\} \subset \mathbb{R}^3$, ¿es L.I o L.D?

$V_1 = (0,1,-1)$; $V_2 = (1,0,1)$; $V_3 = (2,-2,2)$

SOL:

Sea: $\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3 = 0$
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ } I.L

$\alpha_1(0,1,-1) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(2,-2,2) = (0,0,0)$

$$\left.\begin{aligned} 0\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 1\alpha_1 + 0\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \\ -1\alpha_1 + 1\alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{SEL}$$

Luego:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

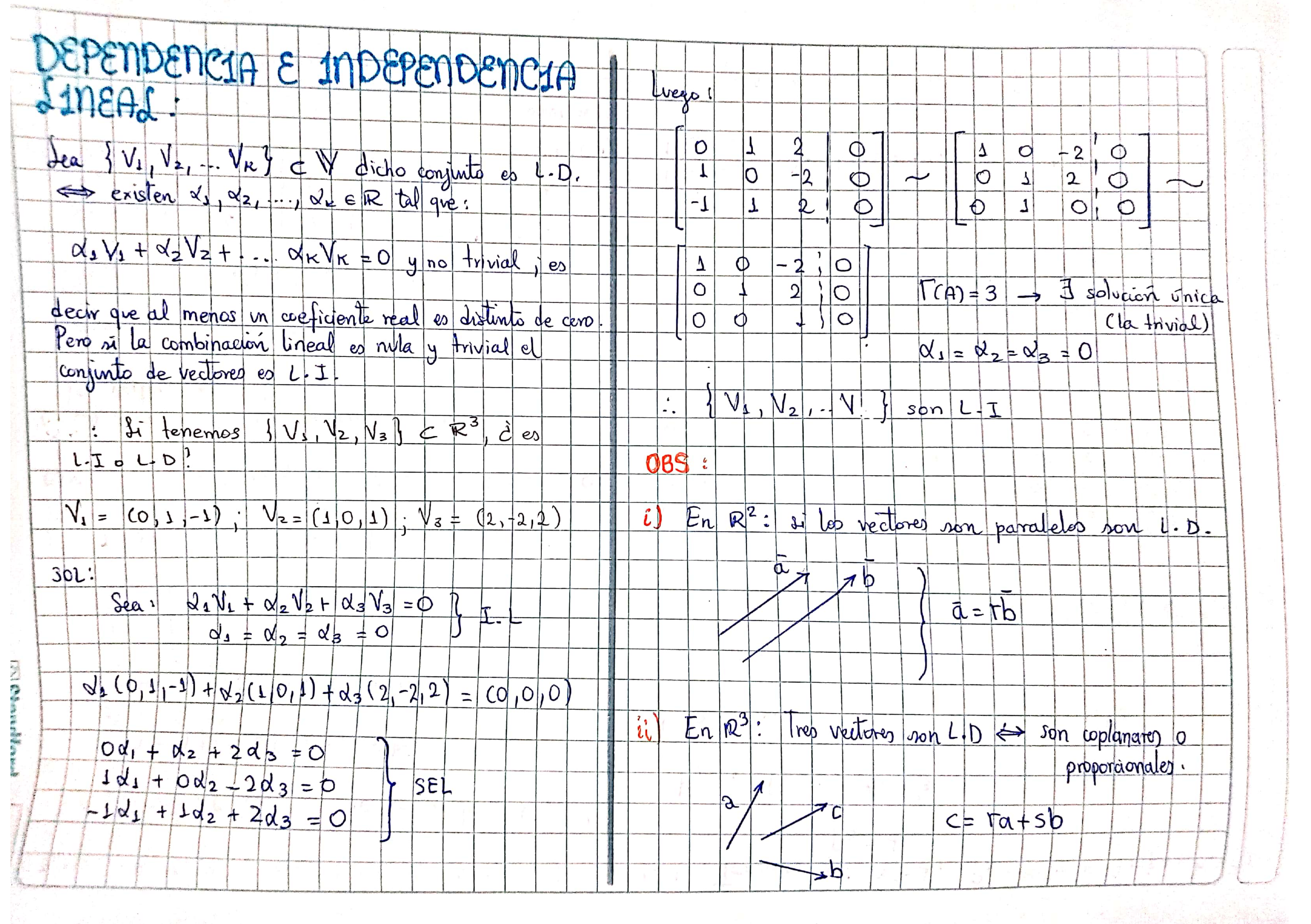
$r(A) = 3 \rightarrow \exists$ solución única (la trivial)

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

∴ $\{V_1, V_2, ... V\}$ son L.I

OBS:

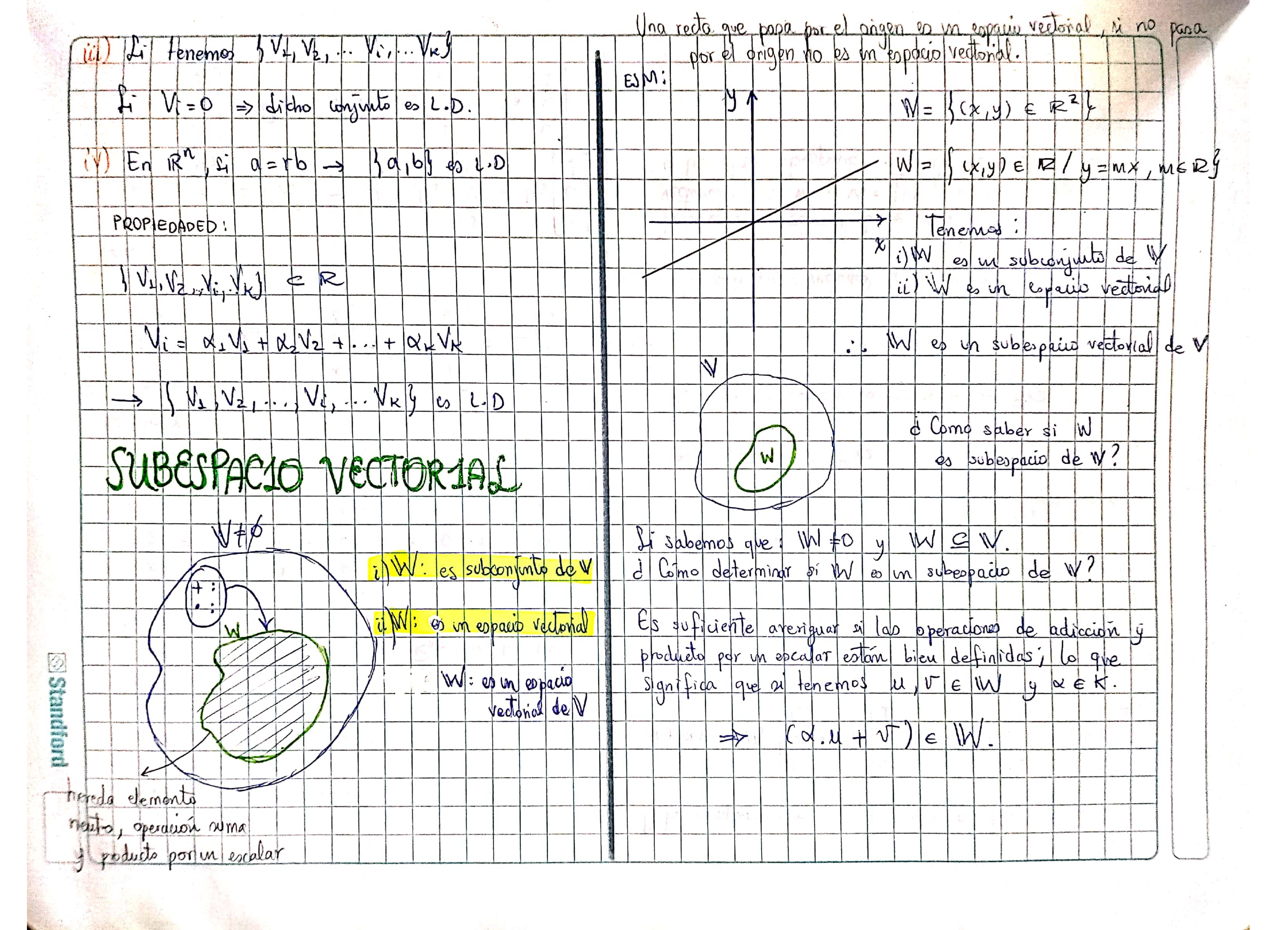
i) En $\mathbb{R}^2$: si los vectores son paralelos son L.D.



$\bar{a} = r\bar{b}$

ii) En $\mathbb{R}^3$: Tres vectores son L.D $\Leftrightarrow$ son coplanares o proporcionales.

$c = ra + sb$



iii) Si tenemos $\{V_1, V_2, \ldots V_i, \ldots V_k\}$

Si $V_i = 0 \Rightarrow$ dicho conjunto es L.D.

iv) En $\mathbb{R}^n$, si $a = rb \rightarrow \{a, b\}$ es L.D

PROPIEDADED:

$\{V_1, V_2, \ldots V_i, \ldots V_k\} \in \mathbb{R}$

$V_i = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \ldots + \alpha_k V_k$

$\rightarrow \{V_1, V_2, \ldots, V_i, \ldots V_k\}$ es L.D

SUBESPACIO VECTORIAL

$V \neq \emptyset$

i) W: es subconjunto de V

ii) W: es un espacio vectorial

W: es un espacio vectorial de V

hereda elemento neutro, operación suma y producto por un escalar

Una recta que pasa por el origen es un espacio vectorial, si no pasa por el origen no es un espacio vectorial.

EJM:

$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$W = \{(x, y) \in \mathbb{R} / y = mx, m \in \mathbb{R}\}$

Tenemos:

i) W es un subconjunto de V

ii) W es un espacio vectorial

$\therefore$ W es un subespacio vectorial de V

¿Como saber si W es subespacio de V?

Si sabemos que: $W \neq 0$ y $W \subseteq V$.

¿Cómo determinar si W es un subespacio de V?

Es suficiente averiguar si las operaciones de adicción y producto por un escalar están bien definidas; lo que significa que si tenemos $u, v \in W$ y $\alpha \in K$.

$\Rightarrow (\alpha . u + v) \in W$.

EJM :

a) $R_{xz} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, y = 0 \}$ ¿Es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

SOL:

Se tiene que los elementos de R_{xz} son de la forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R_{xz} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sean:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in R_{xz} \rightarrow u = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in R_{xz} \rightarrow v = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Debe cumplirse que: $u + \alpha v \in R_{xy}$

$$u + \alpha v = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha . \left[v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$u + \alpha v = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u + \alpha v = (u + \alpha v_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (u_3 + \alpha v_3) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow u + \alpha v \in R_{xz}$

$\therefore R_{xz}$ es un subespacio vectorial de R_{xz}

OBS:

i) Todo subespacio vectorial tiene su vector neutro aditivo

ii) Todo espacio vectorial tiene al menos dos subespacios vectoriales $W = V$ y $W = \{0\}$; llamados impropios y a los otros subespacios vectoriales se llaman propio.

iii) Si tenemos:

$$Ax = 0 \;,\; A \in M_{m \times n} \text{ (coeficientes de } A \text{ pertenecen a } K)$$

El conjunto de soluciones es un subespacio vectorial de K^n.

iv) Las soluciones de un sistema homogéneo en $\mathbb{R}$: $AX = 0$; es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

$\mathcal{L}$: espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

- Un plano que pasa por el origen de coordenadas de $\mathbb{R}^3$ es también un subespacio vectorial.

EJERCICIOS:

a) $(1,-1,4,1)$; $(1,1,2,0)$; $(3,0,2,1)$

¿son linealmente independientes?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- $r(A) = 3$ linealmente independiente (V)
- $r(A) < 3$ linealmente dependiente

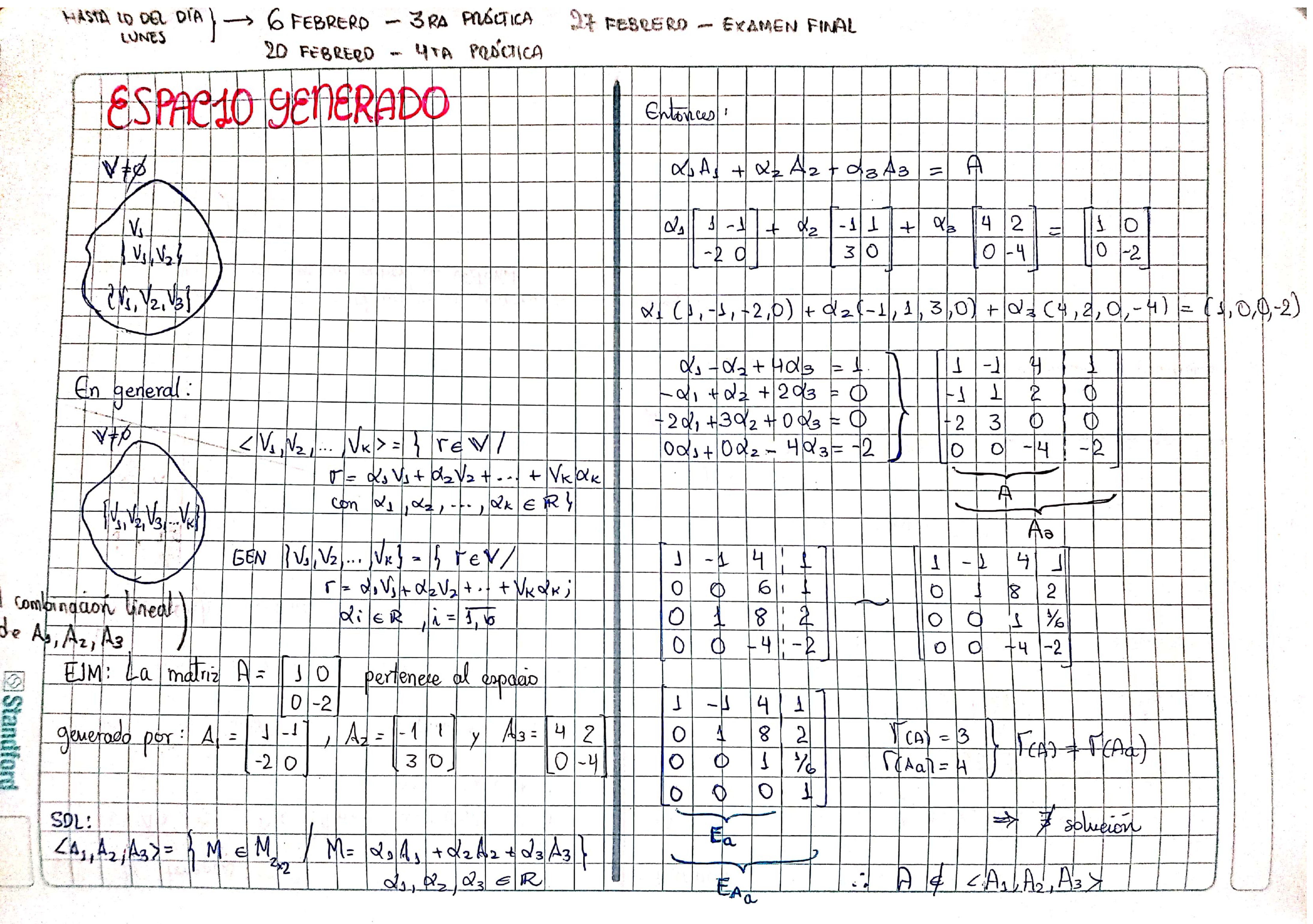
b) $(1,1,1,0)$; $(0,1,0,1)$; $(0,-1,-1,0)$; $(0,1,2,3)$; $(2,1,0,1)$

¿son linealmente independientes?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $r(A) = 4$ linealmente independiente (V)
- $r(A) < 4$ linealmente dependiente

Luego:



HASTA LO DEL DÍA LUNES } → 6 FEBRERO – 3RA PRÁCTICA
20 FEBRERO – 4TA PRÁCTICA
27 FEBRERO – EXAMEN FINAL

ESPACIO GENERADO

$\mathbb{V} \neq \emptyset$

V_1
$\{V_1, V_2\}$
$\{V_1, V_2, V_3\}$

En general:

$\mathbb{V} \neq \emptyset$

$\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_k\}$

$\langle V_1, V_2, \dots, V_k \rangle = \{ r \in \mathbb{V} \, / \, r = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + V_k \alpha_k$ con $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$

$\text{GEN}\{V_1, V_2, \dots, V_k\} = \{ r \in \mathbb{V} \, / \, r = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + V_k \alpha_k;$ $\alpha_i \in \mathbb{R}, \; i = \overline{1,k}$

(combinación lineal de A_1, A_2, A_3)

EJM: La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ pertenece al espacio generado por: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ y $A_3 = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

SOL:

$\langle A_1, A_2, A_3 \rangle = \{ M \in M_{2\times2} \, / \, M = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \}$
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

Entonces:

$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = A$

$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\alpha_1(1,-1,-2,0) + \alpha_2(-1,1,3,0) + \alpha_3(4,2,0,-4) = (1,0,0,-2)$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 &= 1 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 0\alpha_3 &= 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 - 4\alpha_3 &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

A (coefficient part), A_a (augmented matrix)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{array}\right]$$

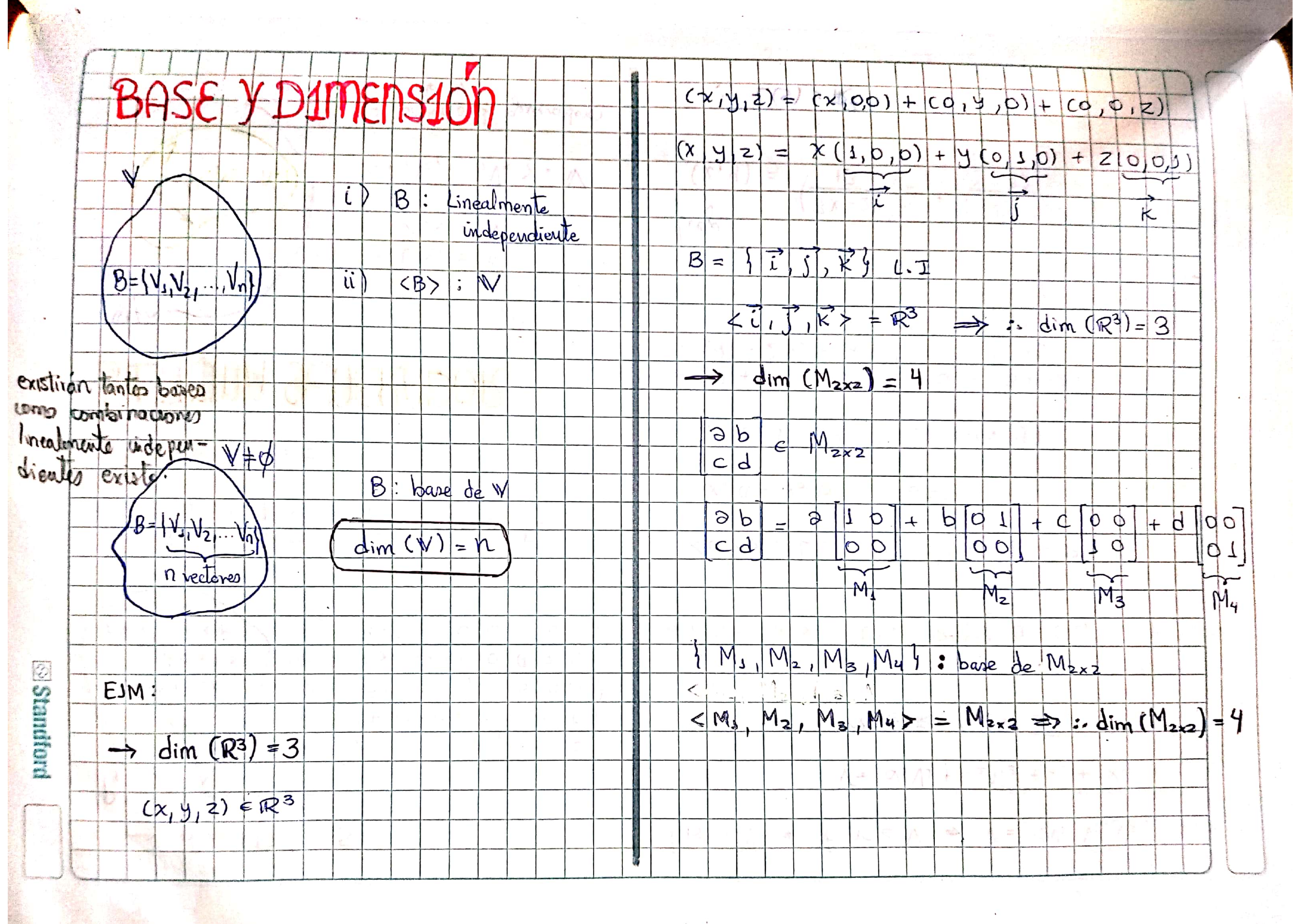
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

E_a, E_{A_a}

$\left.\begin{aligned} r(A) &= 3 \\ r(A_a) &= 4 \end{aligned}\right\} \; r(A) \neq r(A_a)$

$\Rightarrow \nexists$ solución

$\therefore A \notin \langle A_1, A_2, A_3 \rangle$



BASE Y DIMENSIÓN

$\mathbb{V}$

$B = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$

i) B : Linealmente independiente

ii) $\langle B \rangle$; $\mathbb{V}$

existirán tantas bases como combinaciones linealmente independientes existan.

$\mathbb{V} \neq \emptyset$

$B = \{V_1, V_2, \ldots V_n\}$ (n vectores)

B : base de $\mathbb{V}$

$\dim(\mathbb{V}) = n$

EJM:

→ $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$

$(x, y, z) = x\underbrace{(1, 0, 0)}_{\vec{i}} + y\underbrace{(0, 1, 0)}_{\vec{j}} + z\underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{k}}$

$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ L.I

$\langle \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \rangle = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \therefore \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

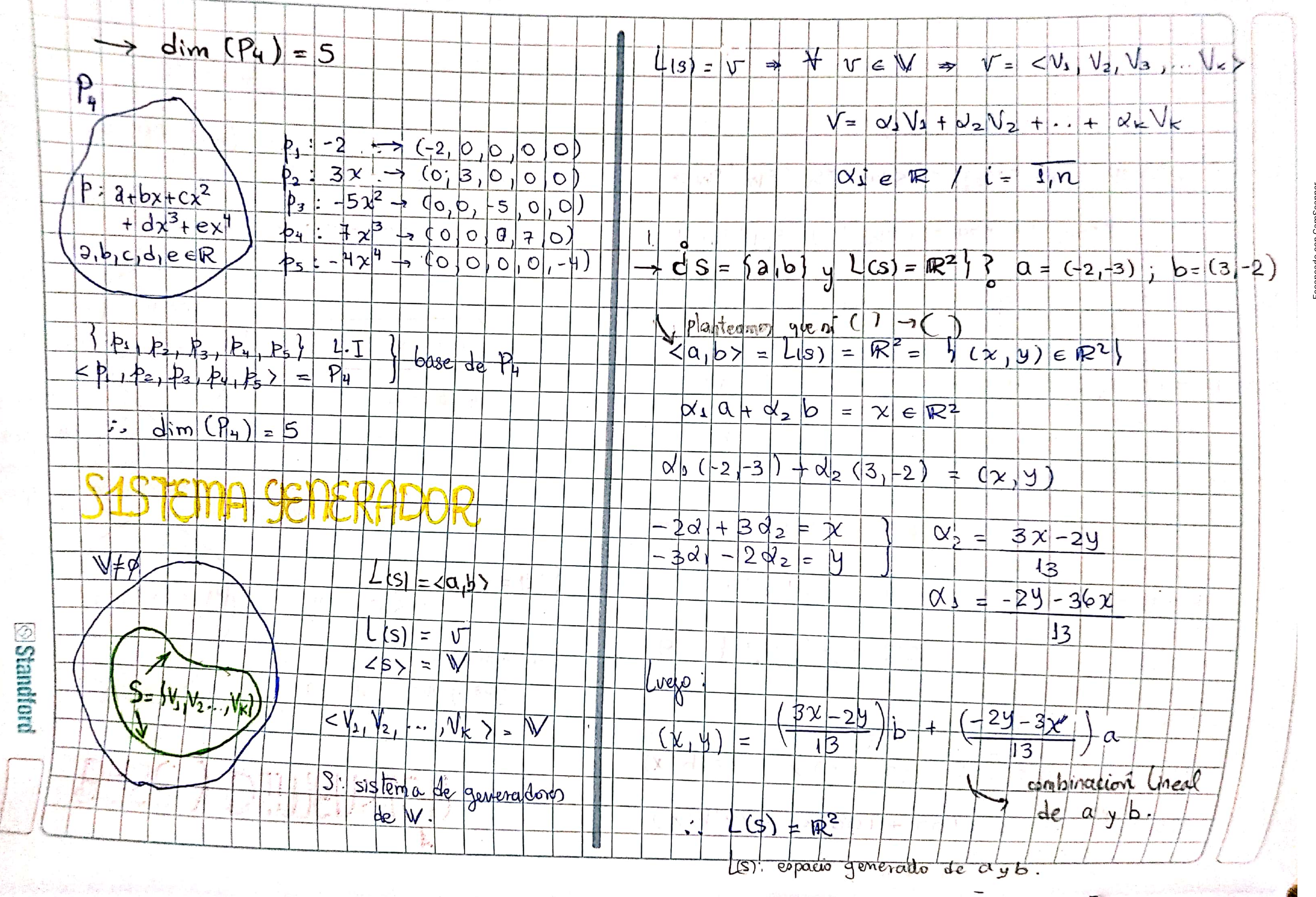
→ $\dim(M_{2\times2}) = 4$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times2}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_1} + b\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_2} + c\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_3} + d\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_4}$

$\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$: base de $M_{2\times2}$

$\langle M_1, M_2, M_3, M_4 \rangle = M_{2\times2} \Rightarrow \therefore \dim(M_{2\times2}) = 4$



$\rightarrow \dim(P_4) = 5$

P_4

$p: a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

$a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

$p_1: -2 \rightarrow (-2, 0, 0, 0, 0)$

$p_2: 3x \rightarrow (0, 3, 0, 0, 0)$

$p_3: -5x^2 \rightarrow (0, 0, -5, 0, 0)$

$p_4: 7x^3 \rightarrow (0, 0, 0, 7, 0)$

$p_5: -4x^4 \rightarrow (0, 0, 0, 0, -4)$

$\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ L.I

$\langle p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \rangle = P_4$

} base de P_4

$\therefore \dim(P_4) = 5$

SISTEMA GENERADOR

$V \neq \emptyset$

$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

$L(S) = \langle a, b \rangle$

$L(S) = V$

$\langle S \rangle = V$

$\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = V$

S: sistema de generadores de V.

$L(S) = V \Rightarrow \forall v \in V \Rightarrow v = \langle v_1, v_2, v_3, \ldots v_k \rangle$

$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k$

$\alpha_i \in \mathbb{R} \;/\; i = \overline{1, n}$

1. $\rightarrow$ ¿$S = \{a, b\}$ y $L(S) = \mathbb{R}^2$? ; $a = (-2, -3)$; $b = (3, -2)$

planteamos que si ( ) → ( )

$\langle a, b \rangle = L(S) = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

$\alpha_1 a + \alpha_2 b = x \in \mathbb{R}^2$

$\alpha_1 (-2, -3) + \alpha_2 (3, -2) = (x, y)$

$$\left.\begin{aligned} -2\alpha_1 + 3\alpha_2 &= x \\ -3\alpha_1 - 2\alpha_2 &= y \end{aligned}\right\}$$

$\alpha_2 = \dfrac{3x - 2y}{13}$

$\alpha_1 = \dfrac{-2y - 36x}{13}$

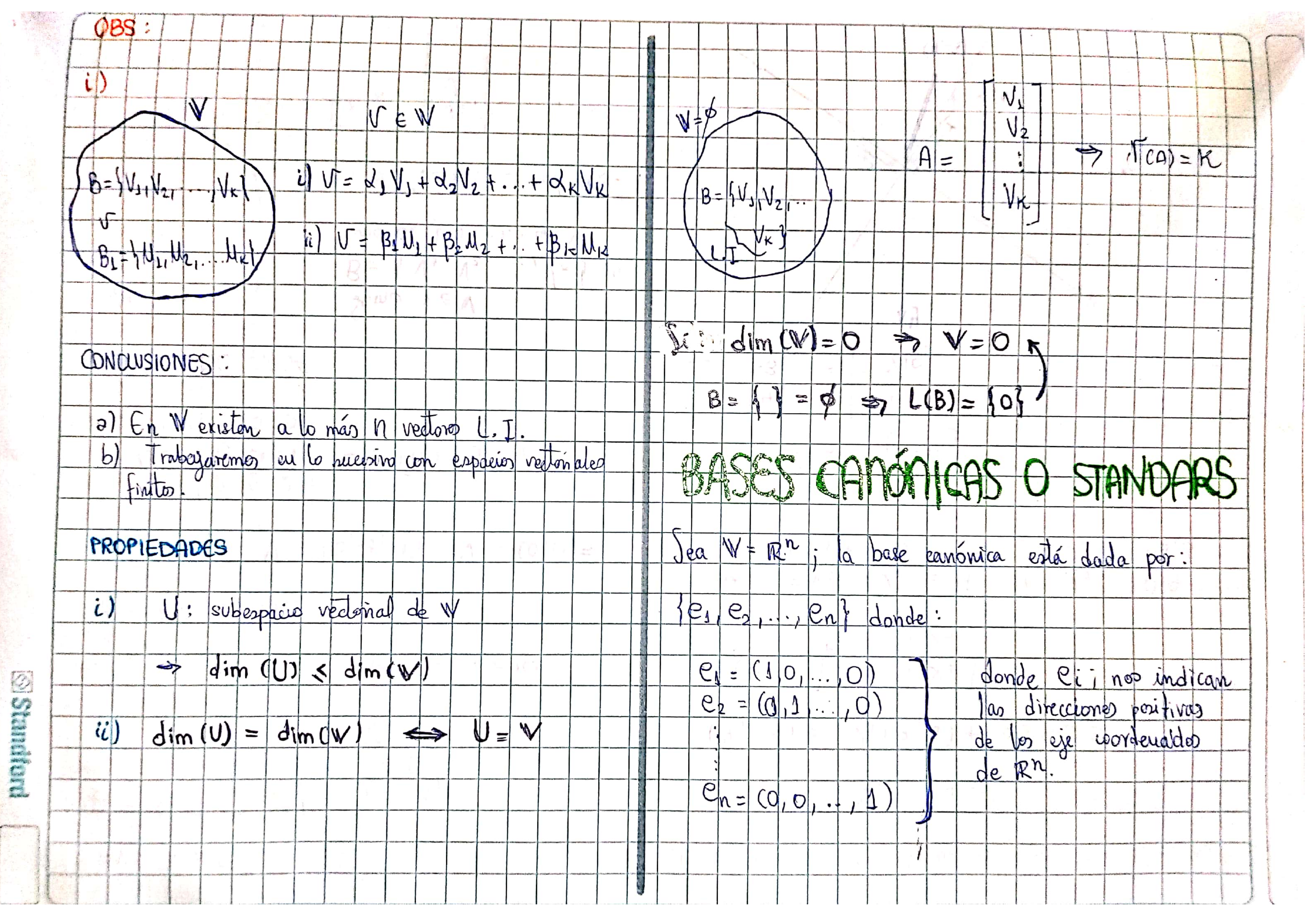
Luego:

$(x, y) = \left(\dfrac{3x - 2y}{13}\right) b + \left(\dfrac{-2y - 3x}{13}\right) a$

combinación lineal de a y b.

$\therefore L(S) = \mathbb{R}^2$

L(S): espacio generado de a y b.



OBS:

i)

$v \in \mathbb{V}$

i) $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k$

ii) $v = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_k u_k$

$$A = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = k$$

CONCLUSIONES:

a) En $\mathbb{V}$ existen a lo más n vectores L.I.

b) Trabajaremos en lo sucesivo con espacios vectoriales finitos.

Si dim $(\mathbb{V}) = 0 \Rightarrow \mathbb{V} = 0$

$B = \{\ \} = \phi \Rightarrow L(B) = \{0\}$

PROPIEDADES

i) U: subespacio vectorial de $\mathbb{V}$

$\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(\mathbb{V})$

ii) $\dim(U) = \dim(\mathbb{V}) \Leftrightarrow U = \mathbb{V}$

BASES CANÓNICAS O STANDARS

Sea $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$; la base canónica está dada por:

$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ donde:

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$
$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$
$\vdots$
$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$

donde e_i nos indican las direcciones positivas de los eje coordenados de $\mathbb{R}^n$.

EJM: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$

$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$; $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$

EJM: Una base de $\mathbb{R}^3$, que no es canónica.

$B = \{V_1, V_2, V_3\}$

$V_1 = (2,2,2)$; $V_2 = (0,-1,-1)$, $V_3 = (0,0,5)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow r(A) = 3 \quad L.I$$

CAMBIO DE BASE:

$\mathbb{V} \neq \emptyset$

$B = \{V_1, V_2, \dots V_k\}$

x

Tomo $x \in \mathbb{V}$

$B = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ es una de las bases de $\mathbb{V}$

$x = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \dots + V_k \alpha_k$.

$$[x]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

EJM: Expresar $(4,-3)$ en la base $B = \{V_1, V_2\}$

$V_1 = (3;1)$ y $V_2 = (-1,3)$

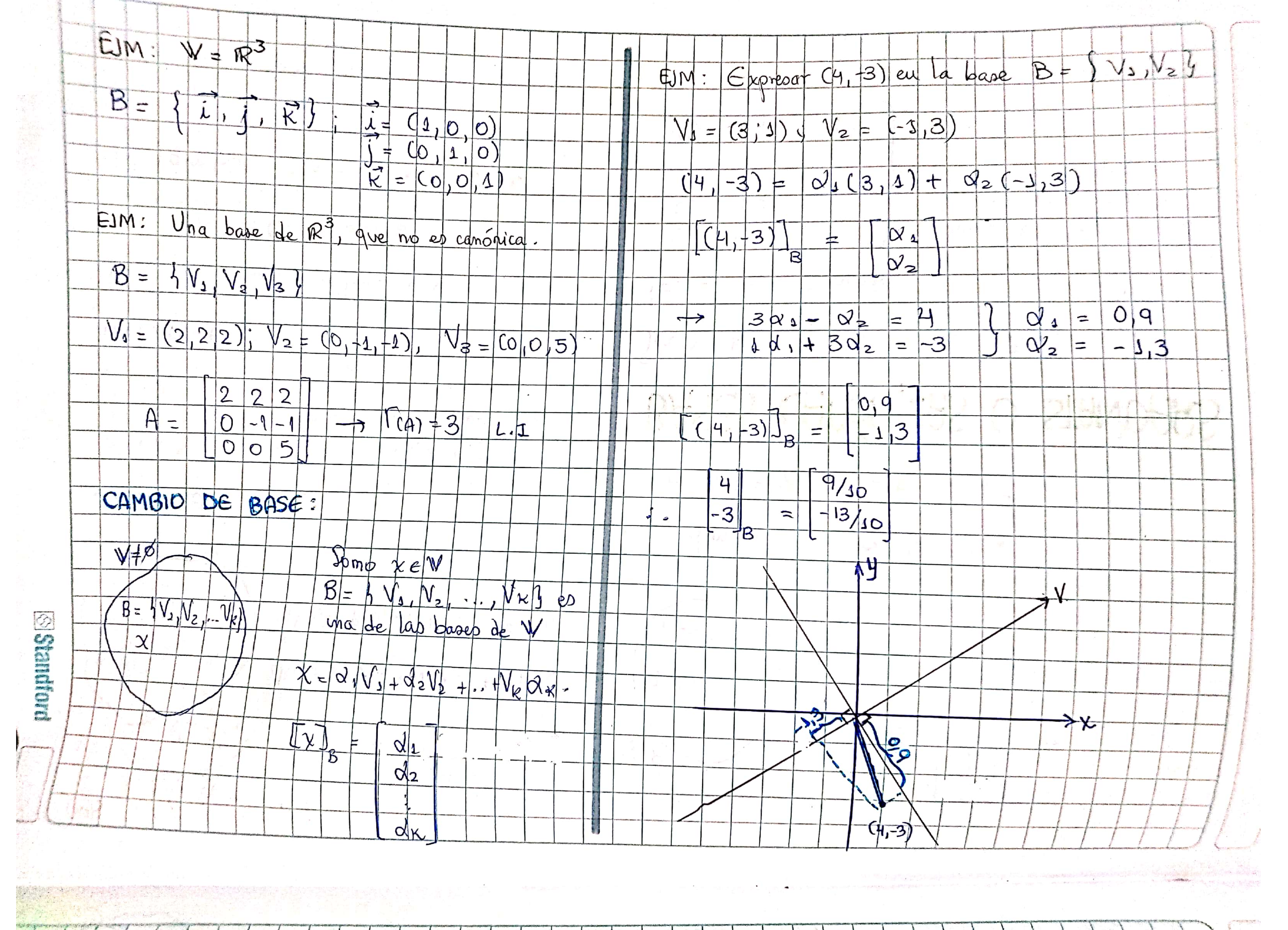
$(4,-3) = \alpha_1(3,1) + \alpha_2(-1,3)$

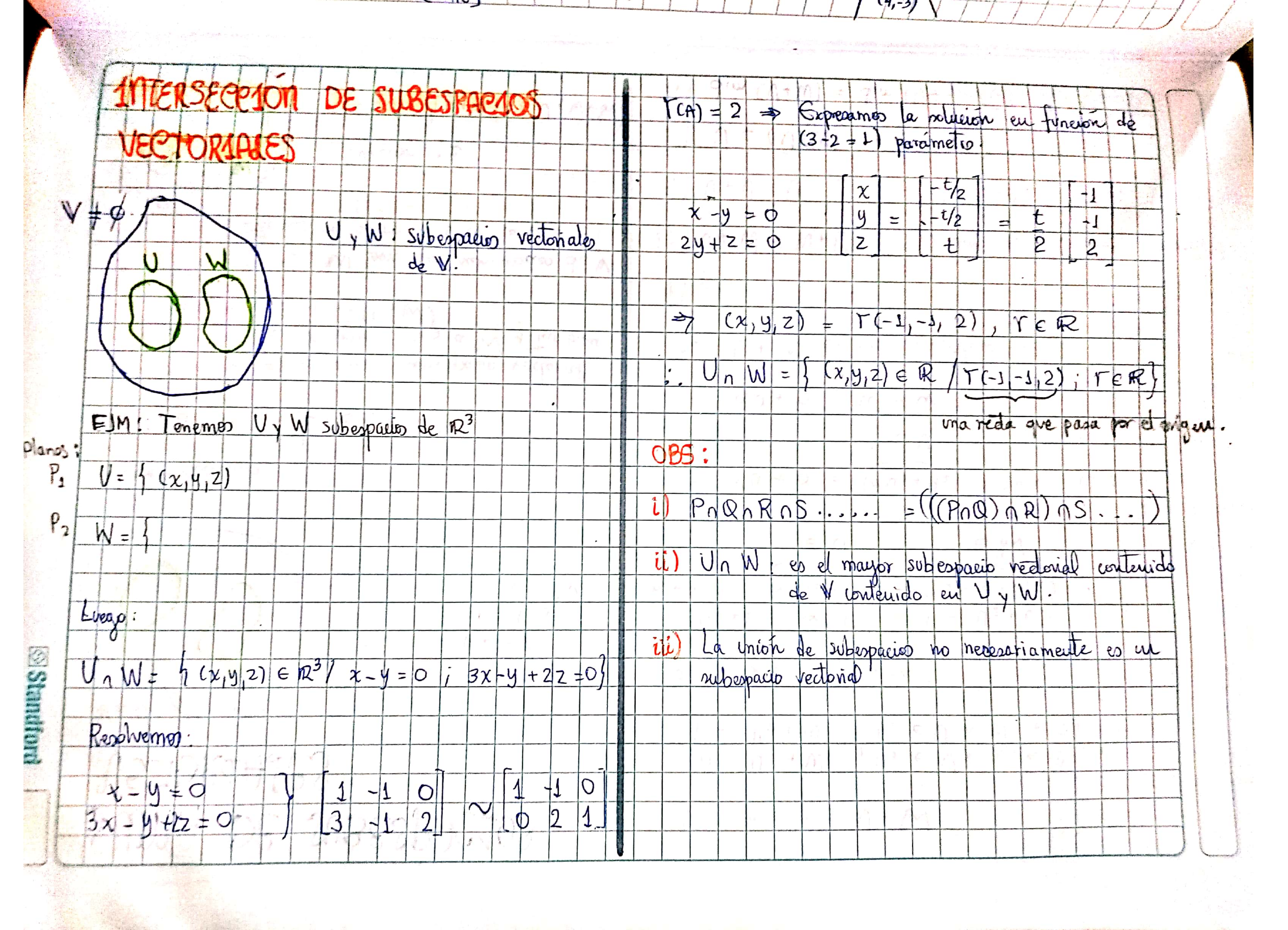
$$[(4,-3)]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 - \alpha_2 = 4 \\ 1\alpha_1 + 3\alpha_2 = -3 \end{cases}$ $\quad \alpha_1 = 0{,}9$, $\alpha_2 = -1{,}3$

$$[(4,-3)]_B = \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ -1{,}3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 9/10 \\ -13/10 \end{bmatrix}$$





INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS VECTORIALES

$V \neq \phi$

U y W : subespacios vectoriales de V.

EJM: Tenemos U y W subespacios de $\mathbb{R}^3$

Planos:

P_1 $U = \{ (x, y, z)$

P_2 $W = \{$

Luego:

$$U \cap W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \; x - y = 0 \; ; \; 3x - y + 2z = 0 \}$$

Resolvemos:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$r(A) = 2 \Rightarrow$ Expresamos la solución en función de $(3 - 2 = 1)$ parámetro.

$$\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t/2 \\ -t/2 \\ t \end{bmatrix} = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow (x, y, z) = r(-1, -1, 2) \,, \; r \in \mathbb{R}$

$\therefore U \cap W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R} \,/\, r(-1, -1, 2) \; ; \; r \in \mathbb{R} \}$

una recta que pasa por el origen.

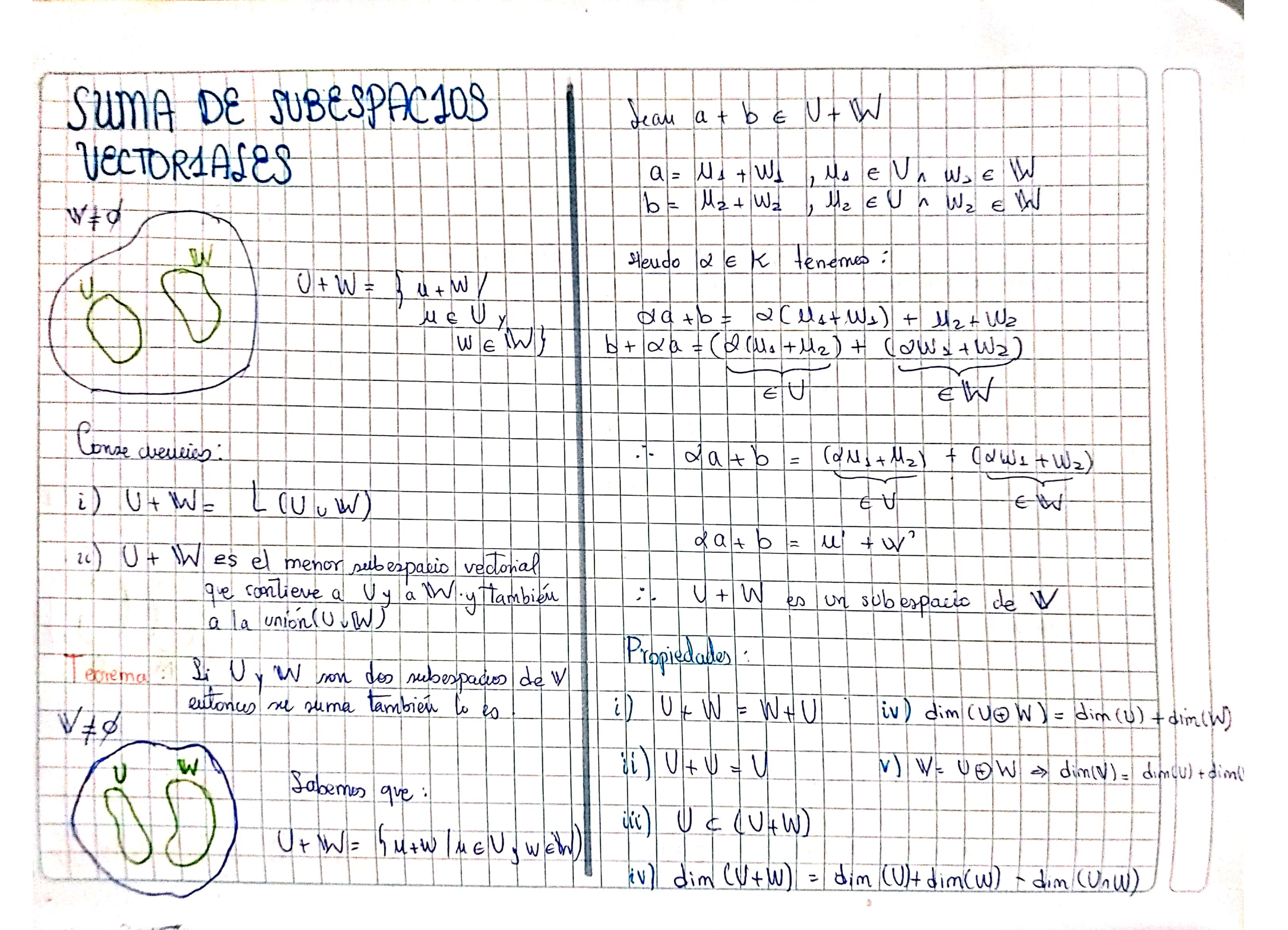
OBS:

i) $P \cap Q \cap R \cap S \ldots\ldots = (((P \cap Q) \cap R) \cap S \ldots)$

ii) $U \cap W$: es el mayor subespacio vectorial contenido de V contenido en U y W.

iii) La unión de subespacios no necesariamente es un subespacio vectorial

SUMA DE SUBESPACIOS VECTORIALES



$\mathbb{V} \neq \emptyset$

$U + W = \{ u + w \mid u \in U \text{ y } w \in W \}$

Consecuencias:

i) $U + W = L(U \cup W)$

ii) $U + W$ es el menor subespacio vectorial que contiene a U y a W, y también a la unión $(U \cup W)$

Teorema: Si U y W son dos subespacios de $\mathbb{V}$ entonces su suma también lo es.

$\mathbb{V} \neq \emptyset$

Sabemos que:

$U + W = \{ u + w \mid u \in U \text{ y } w \in W \}$

Sean $a + b \in U + W$

$a = u_1 + w_1 \quad , u_1 \in U \wedge w_1 \in W$

$b = u_2 + w_2 \quad , u_2 \in U \wedge w_2 \in W$

Siendo $\alpha \in K$ tenemos:

$\alpha a + b = \alpha(u_1 + w_1) + u_2 + w_2$

$b + \alpha a = \underbrace{(\alpha(u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(\alpha w_1 + w_2)}_{\in W}$

$\therefore \quad \alpha a + b = \underbrace{(\alpha u_1 + u_2)}_{\in U} + \underbrace{(\alpha w_1 + w_2)}_{\in W}$

$\alpha a + b = u' + w'$

$\therefore \quad U + W$ es un subespacio de $\mathbb{V}$

Propiedades:

i) $U + W = W + U$

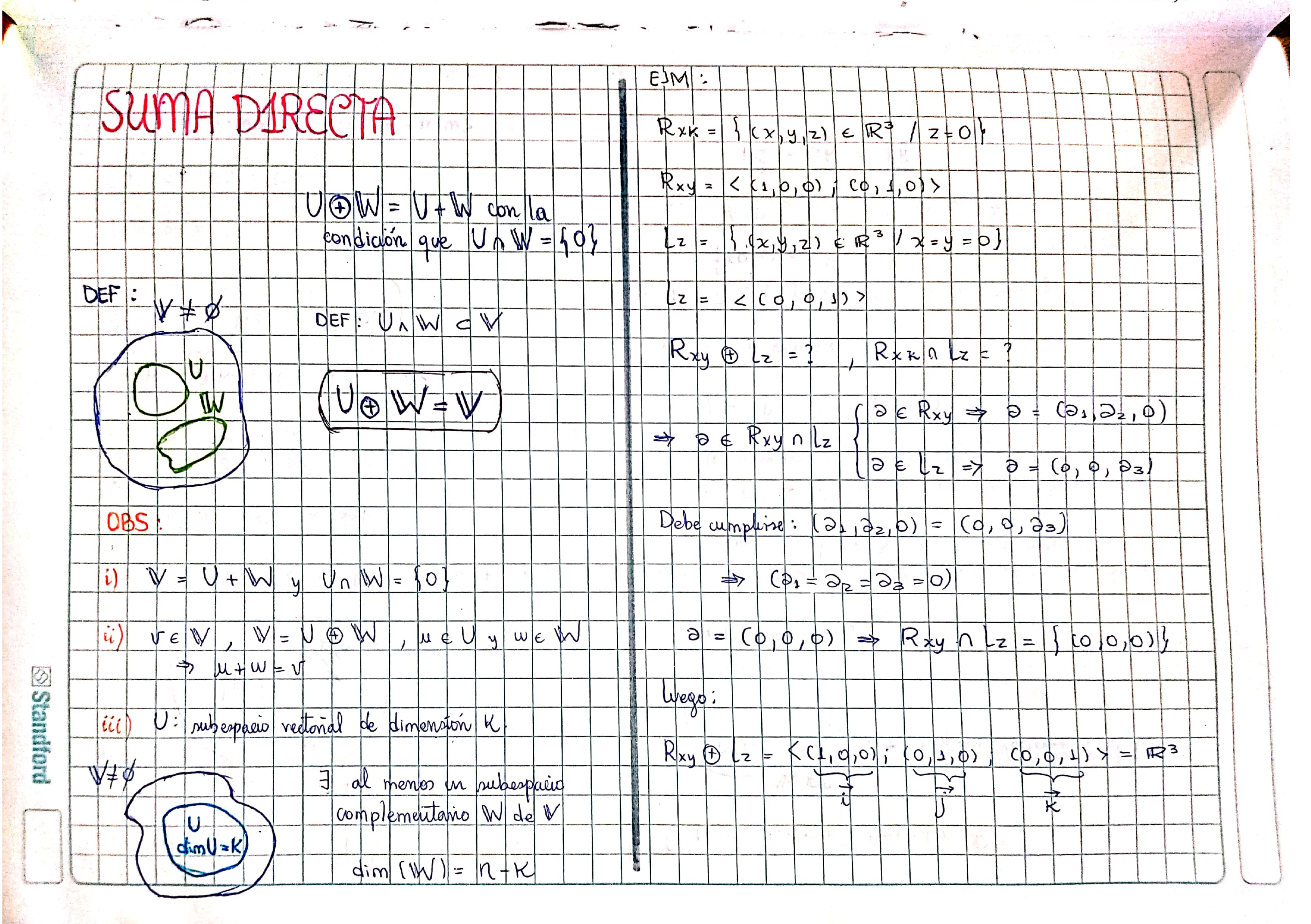
ii) $U + U = U$

iii) $U \subset (U + W)$

iv) $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

iv) $\dim(U \oplus W) = \dim(U) + \dim(W)$

v) $\mathbb{V} = U \oplus W \Rightarrow \dim(\mathbb{V}) = \dim(U) + \dim($



SUMA DIRECTA

$U \oplus W = U + W$ con la condición que $U \cap W = \{0\}$

DEF: $V \neq \emptyset$

DEF: $U, W \subset V$

$$U \oplus W = V$$

OBS:

i) $V = U + W$ y $U \cap W = \{0\}$

ii) $v \in V$, $V = U \oplus W$, $u \in U$ y $w \in W$
$\Rightarrow u + w = v$

iii) U: subespacio vectorial de dimensión K.

$V \neq \emptyset$

$\exists$ al menos un subespacio complementario W de V

$\dim(W) = n - K$

EJM:

$R_{xk} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = 0\}$

$R_{xy} = \langle (1,0,0) ; (0,1,0) \rangle$

$L_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y = 0\}$

$L_z = \langle (0,0,1) \rangle$

$R_{xy} \oplus L_z = ?$, $R_{xk} \cap L_z = ?$

$\Rightarrow \partial \in R_{xy} \cap L_z$ $\begin{cases} \partial \in R_{xy} \Rightarrow \partial = (\partial_1, \partial_2, 0) \\ \partial \in L_z \Rightarrow \partial = (0,0,\partial_3) \end{cases}$

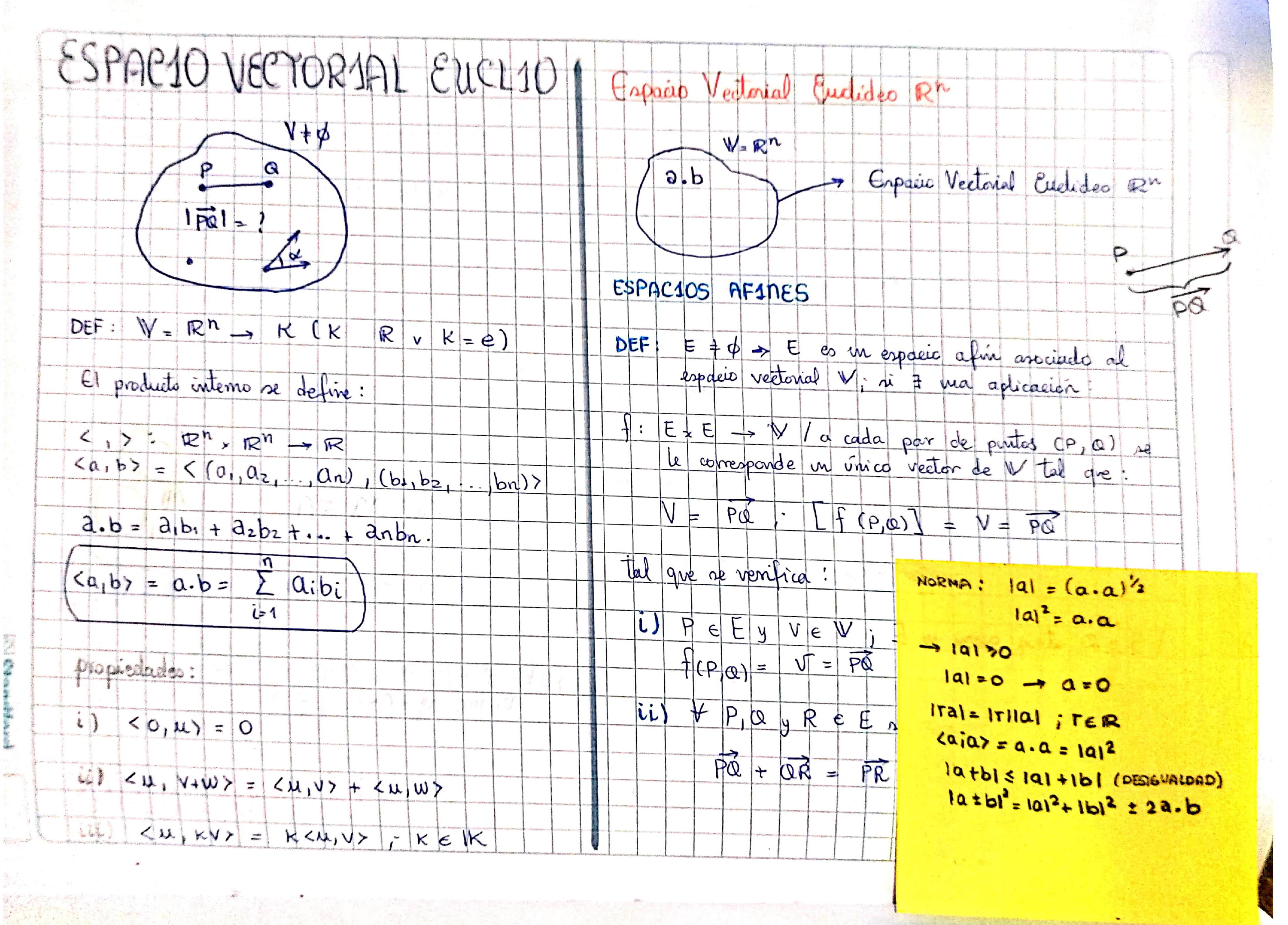
Debe cumplirse: $(\partial_1, \partial_2, 0) = (0,0,\partial_3)$

$\Rightarrow (\partial_1 = \partial_2 = \partial_3 = 0)$

$\partial = (0,0,0) \Rightarrow R_{xy} \cap L_z = \{(0,0,0)\}$

Luego:

$R_{xy} \oplus L_z = \langle \underbrace{(1,0,0)}_{\vec{i}} ; \underbrace{(0,1,0)}_{\vec{j}} ; \underbrace{(0,0,1)}_{\vec{k}} \rangle = \mathbb{R}^3$



ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO

DEF: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n \rightarrow K$ (K $\mathbb{R}$ v $k = e$)

El producto interno se define:

$\langle \, , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$\langle a, b \rangle = \langle (a_1, a_2, \ldots, a_n), (b_1, b_2, \ldots, b_n) \rangle$

$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$

$$\langle a, b \rangle = a \cdot b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

propiedades:

i) $\langle 0, u \rangle = 0$

ii) $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

iii) $\langle u, kv \rangle = k\langle u, v \rangle$; $k \in \mathbb{K}$

Espacio Vectorial Euclideo $\mathbb{R}^n$

ESPACIOS AFINES

DEF: $E \neq \emptyset \rightarrow E$ es un espacio afín asociado al espacio vectorial $\mathbb{V}$, si $\exists$ una aplicación:

$f: E \times E \rightarrow \mathbb{V}$ / a cada par de puntos (P, Q) se le corresponde un único vector de $\mathbb{V}$ tal que:

$V = \vec{PQ}$; $[f(P,Q)] = V = \vec{PQ}$

Tal que se verifica:

i) $P \in E$ y $v \in \mathbb{V}$; ...
$f(P,Q) = v = \vec{PQ}$

ii) $\forall$ P, Q y $R \in E$ ...
$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

NORMA: $|a| = (a \cdot a)^{1/2}$
$|a|^2 = a \cdot a$

$\rightarrow |a| \geq 0$

$|a| = 0 \rightarrow a = 0$

$|ra| = |r||a|$; $r \in \mathbb{R}$

$\langle a; a \rangle = a \cdot a = |a|^2$

$|a+b| \leq |a| + |b|$ (DESIGUALDAD)

$|a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm 2a \cdot b$

OBS:

i) A los elementos de E los llamaremos puntos, mientras que a los de $\mathbb{V}$ vectores.

ii) Si $P \in E$ y $v \in \mathbb{V} \Rightarrow \exists$ un único punto $Q \in E$ / $v = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow Q - P = v = \overrightarrow{PQ}$

Conclusión: El espacio afín es un conjunto de puntos al cual se le asocia un espacio vectorial $\mathbb{V}$ por medio de una aplicación f.

EJM: $E = \mathbb{R}^n$ es un espacio afín asociado al propio espacio vectorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$.

$E = \mathbb{R}^n$

v

PROPIEDADES:

1.- $\overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow \vec{P} = \vec{Q}$

2.- $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

3.- $\overrightarrow{PQ} = Q - P \Rightarrow Q = P + \overrightarrow{PQ}$

4.- $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{QS}$

$Q - P = S - R \Rightarrow R - P = S - Q$

DESIGUALDAD DE CAUCHY - SCHWARZ

Sean $a, b \in \mathbb{R}$

$$(a.b)^2 \leq (a.a)(b.b)$$

Prueba:

Veamos si los vectores a y b son no nulos.

Hacemos: $c = xa - yb$ $\begin{cases} x = b.b \\ y = a.b \end{cases}$

$\Rightarrow c.c \geq 0$

$(xa - yb).(xa - yb) \geq 0$

$xa.(xa - yb) - yb.(xa - yb) \geq 0$

$x^2(a.a) - xy(a.b) - xy(b.a) + y^2(b.b) \geq 0$

$(b.b)^2(a.a) - 2(b.b)(a.b)(a.b) + (a.b)^2(b.b) \geq 0$

$(a.a)(b.b) - 2(a.b)^2 + (a.b)^2 \geq 0$

$(a.a)(b.b) - (a.b)^2 \geq 0$

$(a.a)(b.b) \geq (a.b)^2$

$\therefore$ $(a.b)^2 \leq (a.a)(b.b)$

Escaneado con CamScanner

IMPORTANTE: $a \cdot a = |a|^2$

$u \cdot v = v \cdot u$
$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$
$c(u \cdot v) = (cu) \cdot v = u \cdot (cv)$

De donde tenemos: $|a \cdot b|^2 \leq |a|^2 |b|^2$
$|a \cdot b| \leq |a||b|$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:

$-|a||b|$ $|a \cdot b|$ $|a||b|$

ORTOGONALIDAD DE VECTORES

DEF: Sean $a, b \in \mathbb{R}^n$, decimos que los vectores a y b son ortogonales y los denotaremos $a \perp b$, si:

$$|a+b| = |a-b|$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA:

Tenemos: $|a+b| = |a-b|$
$$|a+b|^2 = |a-b|^2$$
$$|a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b$$
$$4a \cdot b = 0$$
$$\rightarrow a \cdot b = 0$$

$\therefore$ $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$

VECTOR UNITARIO: (u):

$|u| = 1$

EJM: $a = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

$|a| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1 \rightarrow$ $a = u$

EJM:
$i = (1,0,0)$; $j = (0,1,0)$; $k = (0,0,1)$

EJM
$e_1 = (1,0,0,0 \ldots 0)$
$e_2 = (0,1,0,0 \ldots 0)$
$\vdots$
$e_n = (0,0,0,\ldots,1)$

$|e_i| = 1$; $\forall\ i = \overline{1,n}$

$(e_i) \cdot (e_j) = 0$, $\forall\ i \neq j$

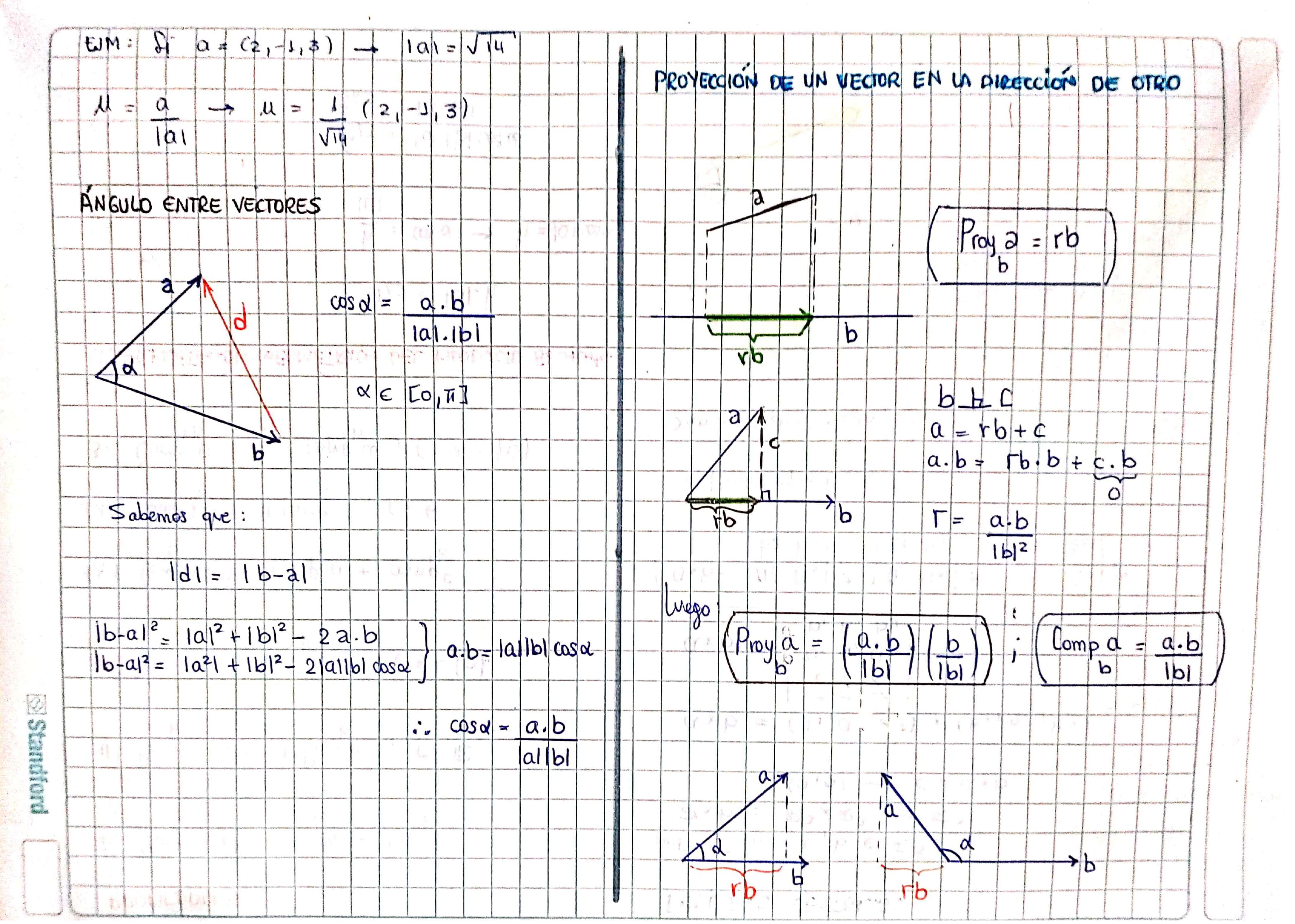
Además, si $a \in \mathbb{R}^n$:

$u = \dfrac{a}{|a|} \Rightarrow a = u|a|$

EJM: Si $a = (2, -1, 3) \rightarrow |a| = \sqrt{14}$

$u = \dfrac{a}{|a|} \rightarrow u = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(2, -1, 3)$

ÁNGULO ENTRE VECTORES



$\cos\alpha = \dfrac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$

$\alpha \in [0, \pi]$

Sabemos que:

$|d| = |b - a|$

$|b-a|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b$

$|b-a|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b|\cos\alpha$

$\Big\}\ a \cdot b = |a||b|\cos\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \dfrac{a \cdot b}{|a||b|}$

PROYECCIÓN DE UN VECTOR EN LA DIRECCIÓN DE OTRO

$\text{Proy}_b\, a = rb$

$b \perp c$

$a = rb + c$

$a \cdot b = rb \cdot b + \underbrace{c \cdot b}_{0}$

$r = \dfrac{a \cdot b}{|b|^2}$

Luego:

$\text{Proy}_b\, a = \left(\dfrac{a \cdot b}{|b|}\right)\left(\dfrac{b}{|b|}\right)$; $\text{Comp}_b\, a = \dfrac{a \cdot b}{|b|}$

Si A es ⊥ B → $|A\times B| = |A|\cdot|B|$

PROPIEDADES:

i) $Proy_b(a+c) = proy_b a + Proy_b c$

ii) $Proy_b(ra) = r\,Proy_b a \; ; \; r \in \mathbb{R}$

iii) $Proy_{rb}(a) = Proy_b a \; ; \; r \in \mathbb{R} - \{0\}$

1a) $Comp_b(a+c) = comp_b a + comp_b c$

2a) $Comp_b\, r a = r\, comp_b a \; ; \; r \in \mathbb{R}$

3) $Comp_{rb} a = \frac{r}{|r|} \cdot comp_b a \; ; \; r \in \mathbb{R} - \{0\}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO ESCALAR

$A_{\square} = |b| \cdot h$

$\frac{h}{|a|} = \cos\alpha \rightarrow h = |a|\cos\alpha$

$A_{\square} = |a|\cdot|b|\cos\alpha$

$A_{\square} =$ ~~$|a\cdot b|$~~ $a \cdot b$

PRODUCTO VECTORIAL

DEF: Sean $a, b \in \mathbb{R}^3$

$a \times b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(a, b) \longrightarrow c = a \times b$

$a \times b = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3)$

$$a \times b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

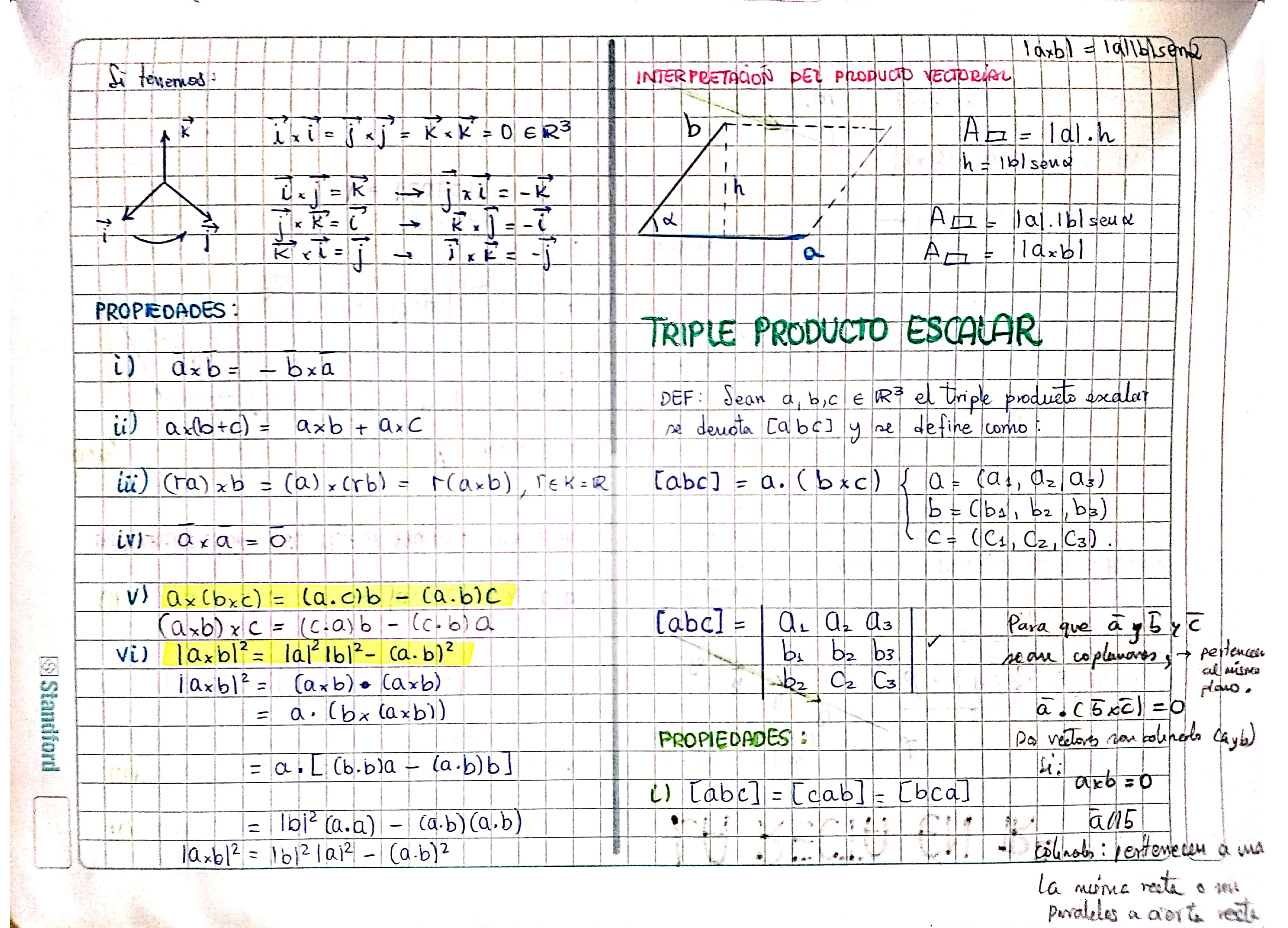
En forma equivalente:

$a \times b = (a_2 b_3 - b_2 a_3 ; \; b_1 a_3 - a_1 b_3 ; \; a_1 b_2 - b_1 a_2)$

$a \times b \perp a$
$a \times b \perp b$

$(a \times b) \cdot a = 0$

$(a \times b) \cdot b =$



Si tenemos:

$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0 \in \mathbb{R}^3$

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k} \rightarrow \vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i} \rightarrow \vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j} \rightarrow \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

PROPIEDADES:

i) $\bar{a}\times \bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$

ii) $a\times(b+c) = a\times b + a\times c$

iii) $(ra)\times b = (a)\times(rb) = r(a\times b)$, $r \in K = \mathbb{R}$

iv) $\bar{a}\times\bar{a} = \bar{0}$

v) $a\times(b\times c) = (a.c)b - (a.b)c$

$(a\times b)\times c = (c.a)b - (c.b)a$

vi) $|a\times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a.b)^2$

$|a\times b|^2 = (a\times b)\bullet(a\times b)$

$= a\cdot(b\times(a\times b))$

$= a\cdot[(b.b)a - (a.b)b]$

$= |b|^2(a.a) - (a.b)(a.b)$

$|a\times b|^2 = |b|^2|a|^2 - (a.b)^2$

$|a\times b| = |a||b|\operatorname{sen}\alpha$

INTERPRETACIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL

$A_{\square} = |a|.h$

$h = |b|\operatorname{sen}\alpha$

$A_{\square} = |a|.|b|\operatorname{sen}\alpha$

$A_{\square} = |a\times b|$

TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

DEF: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ el triple producto escalar se denota $[a\,b\,c]$ y se define como:

$[abc] = a.(b\times c)$ $\begin{cases} a = (a_1, a_2, a_3) \\ b = (b_1, b_2, b_3) \\ c = (c_1, c_2, c_3). \end{cases}$

$[abc] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ✓

Para que $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y $\bar{c}$ sean coplanares, → pertenecen al mismo plano.

$\bar{a}\bullet(\bar{b}\times\bar{c}) = 0$

Dos vectores son colineales (a y b)

Si:

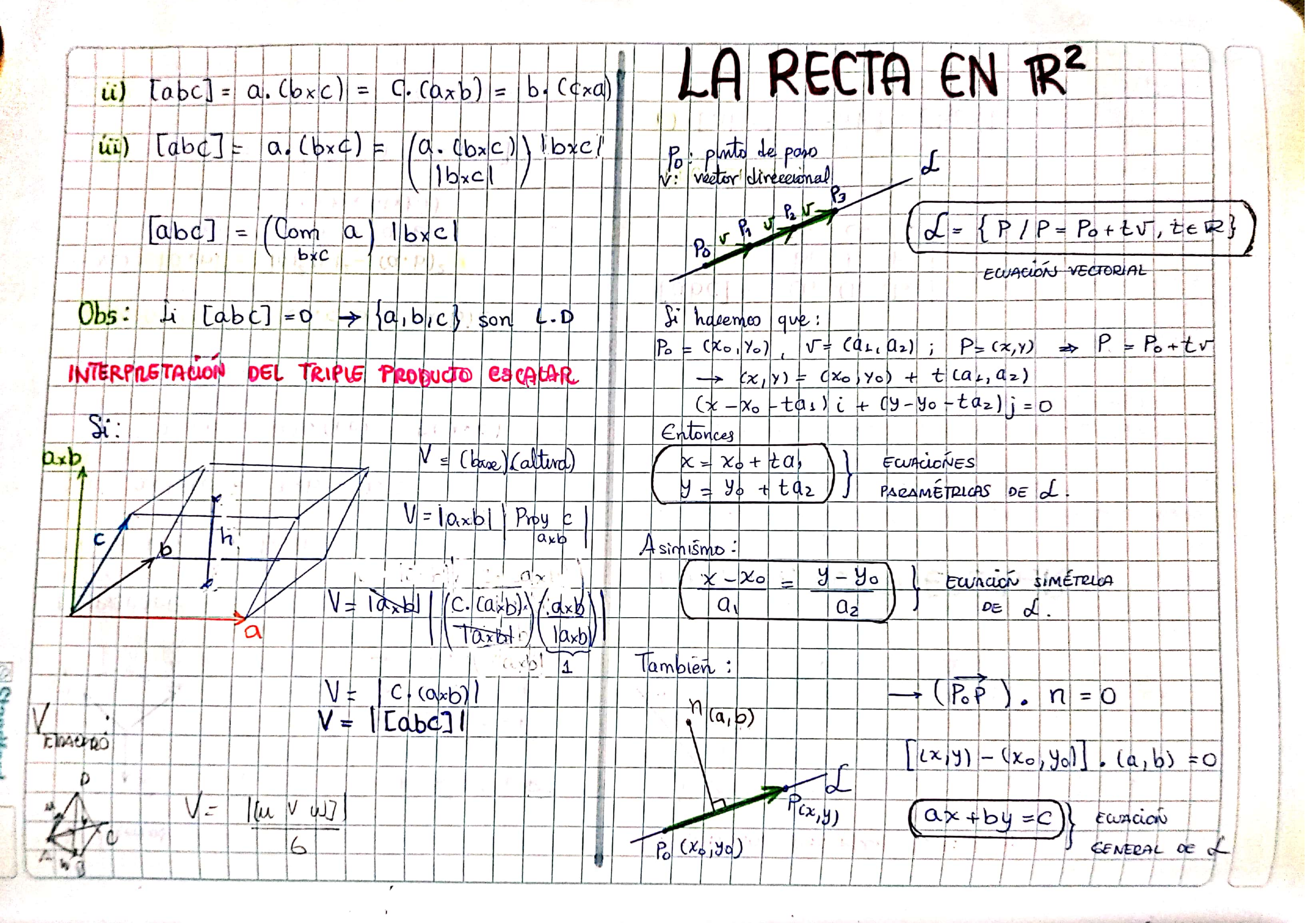
$a\times b = 0$

$\bar{a} // \bar{b}$

colineales: pertenecen a una la misma recta o son paralelos a dicha recta

PROPIEDADES:

i) $[abc] = [cab] = [bca]$



ii) $[abc] = a\cdot(b\times c) = c\cdot(a\times b) = b\cdot(c\times a)$

iii) $[abc] = a\cdot(b\times c) = \left(\dfrac{a\cdot(b\times c)}{|b\times c|}\right)|b\times c|$

$[abc] = \left(Com_{b\times c}\, a\right)|b\times c|$

Obs: Si $[abc]=0 \rightarrow \{a,b,c\}$ son L.D

INTERPRETACIÓN DEL TRIPLE PRODUCTO ESCALAR

Si:

$V = (\text{base})(\text{altura})$

$V = |a\times b|\,\left|Proy_{a\times b}\, c\right|$

$V = |a\times b|\left|\left(\dfrac{c\cdot(a\times b)}{|a\times b|^2}\right)\left(\dfrac{a\times b}{|a\times b|}\right)\right|$

$V = |c\cdot(a\times b)|$

$V = |[abc]|$

$V_{\text{TETRAEDRO}}$:

$V = \dfrac{|[u\ v\ w]|}{6}$

LA RECTA EN $\mathbb{R}^2$

P_0: punto de paso
v: vector direccional

$\mathcal{L} = \{P \,/\, P = P_0 + tv,\ t\in\mathbb{R}\}$ ECUACIÓN VECTORIAL

Si hacemos que:

$P_0 = (x_0, y_0)$, $v = (a_1, a_2)$; $P = (x,y) \Rightarrow P = P_0 + tv$

$\rightarrow (x,y) = (x_0,y_0) + t(a_1,a_2)$

$(x - x_0 - ta_1)i + (y - y_0 - ta_2)j = 0$

Entonces

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases}$$ ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE $\mathcal{L}$.

Asimismo:

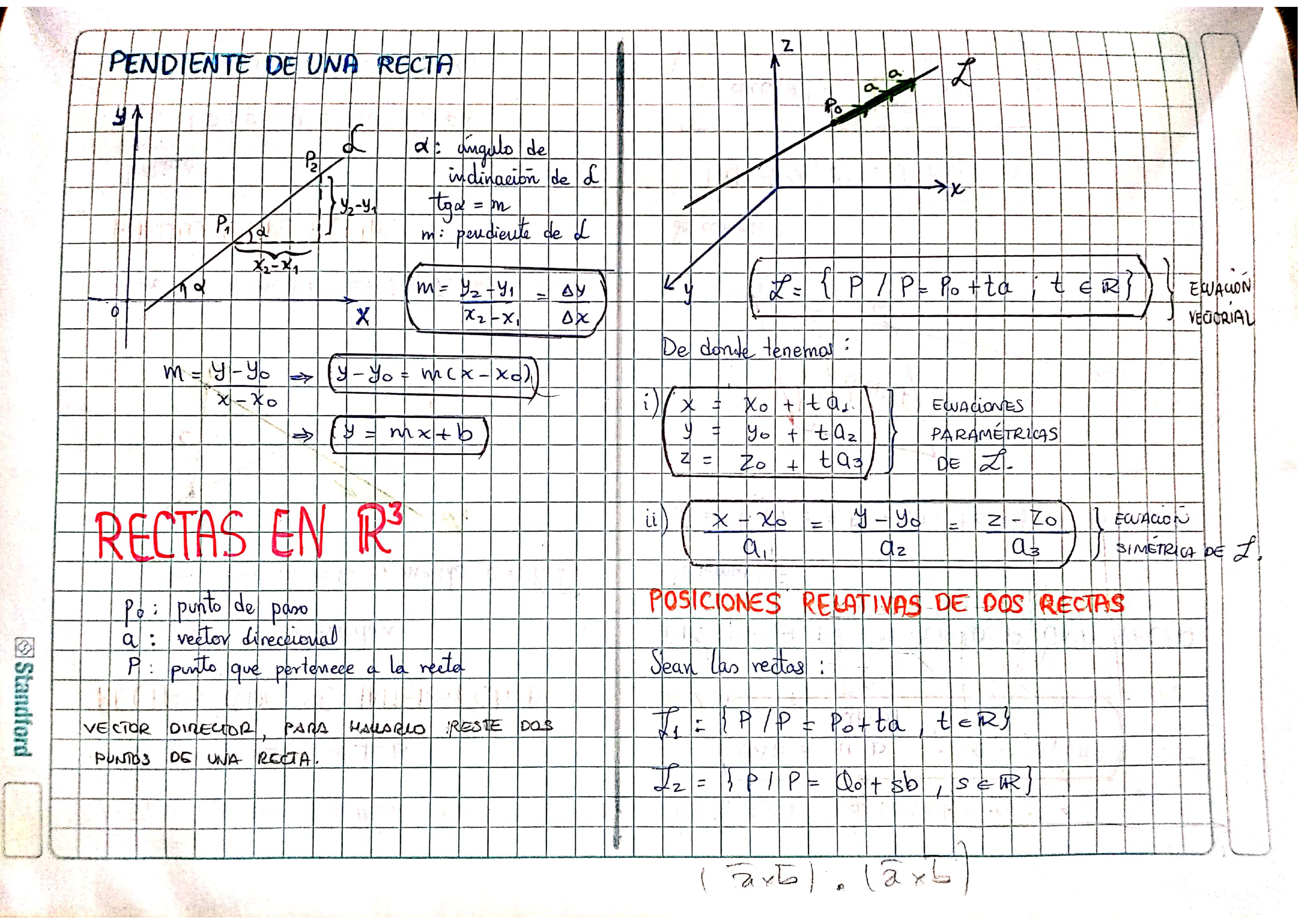
$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$$ ECUACIÓN SIMÉTRICA DE $\mathcal{L}$.

También:

$\rightarrow (\overrightarrow{P_0P})\cdot n = 0$

$[(x,y) - (x_0,y_0)]\cdot(a,b) = 0$

$ax + by = c$ ECUACIÓN GENERAL DE $\mathcal{L}$



PENDIENTE DE UNA RECTA

α: ángulo de inclinación de $\mathcal{L}$

$\operatorname{tg}\alpha = m$

m: pendiente de $\mathcal{L}$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m = \frac{y-y_0}{x-x_0} \Rightarrow y-y_0 = m(x-x_0)$$

$$\Rightarrow y = mx+b$$

RECTAS EN $\mathbb{R}^3$

P_0: punto de paso

a: vector direccional

P: punto que pertenece a la recta

VECTOR DIRECTOR, PARA HALLARLO RESTE DOS PUNTOS DE UNA RECTA.

$$\mathcal{L} = \{P \,/\, P = P_0 + ta \,;\, t \in \mathbb{R}\}$$ ECUACIÓN VECTORIAL

De donde tenemos:

i) $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \\ z = z_0 + ta_3 \end{cases}$ ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE $\mathcal{L}$.

ii) $$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$ ECUACIÓN SIMÉTRICA DE $\mathcal{L}$.

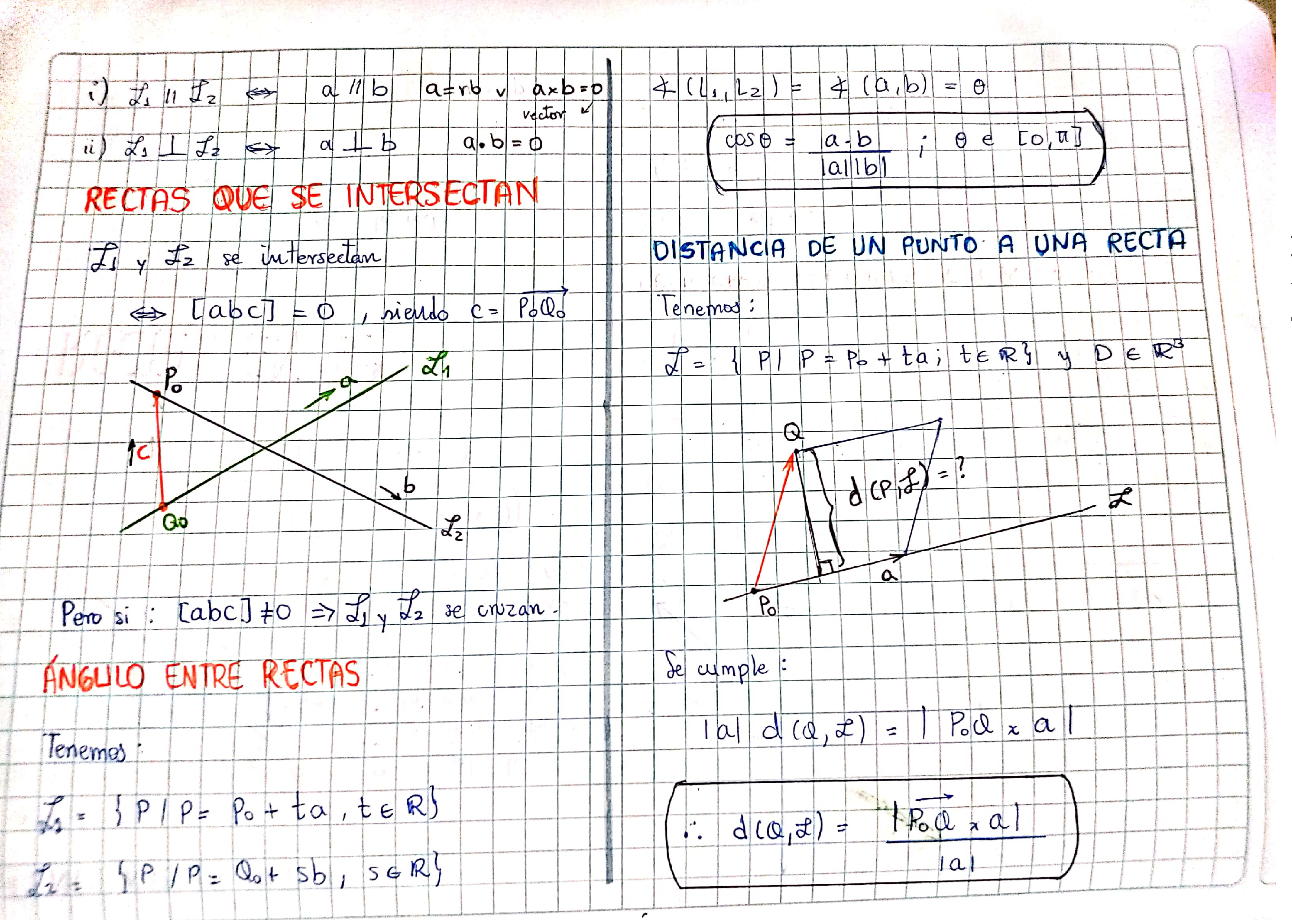
POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Sean las rectas:

$\mathcal{L}_1 = \{P \,/\, P = P_0 + ta \,,\, t \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{L}_2 = \{P \,/\, P = Q_0 + sb \,,\, s \in \mathbb{R}\}$

$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$



i) $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow a \parallel b$ $\quad a = rb \lor a \times b = 0$ (vector)

ii) $\mathcal{L}_1 \perp \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow a \perp b$ $\quad a \cdot b = 0$

RECTAS QUE SE INTERSECTAN

$\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se intersectan

$\Leftrightarrow [abc] = 0$, siendo $c = \overrightarrow{P_0Q_0}$

Pero si : $[abc] \neq 0 \Rightarrow \mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se cruzan.

ÁNGULO ENTRE RECTAS

Tenemos :

$\mathcal{L}_1 = \{P \mid P = P_0 + ta, t \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{L}_2 = \{P \mid P = Q_0 + sb, s \in \mathbb{R}\}$

$\measuredangle(L_1, L_2) = \measuredangle(a, b) = \theta$

$$\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} \; ; \; \theta \in [0, \pi]$$

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Tenemos :

$\mathcal{L} = \{P \mid P = P_0 + ta ; t \in \mathbb{R}\}$ y $D \in \mathbb{R}^3$

Se cumple :

$$|a| \, d(Q, \mathcal{L}) = |\overrightarrow{P_0Q} \times a|$$

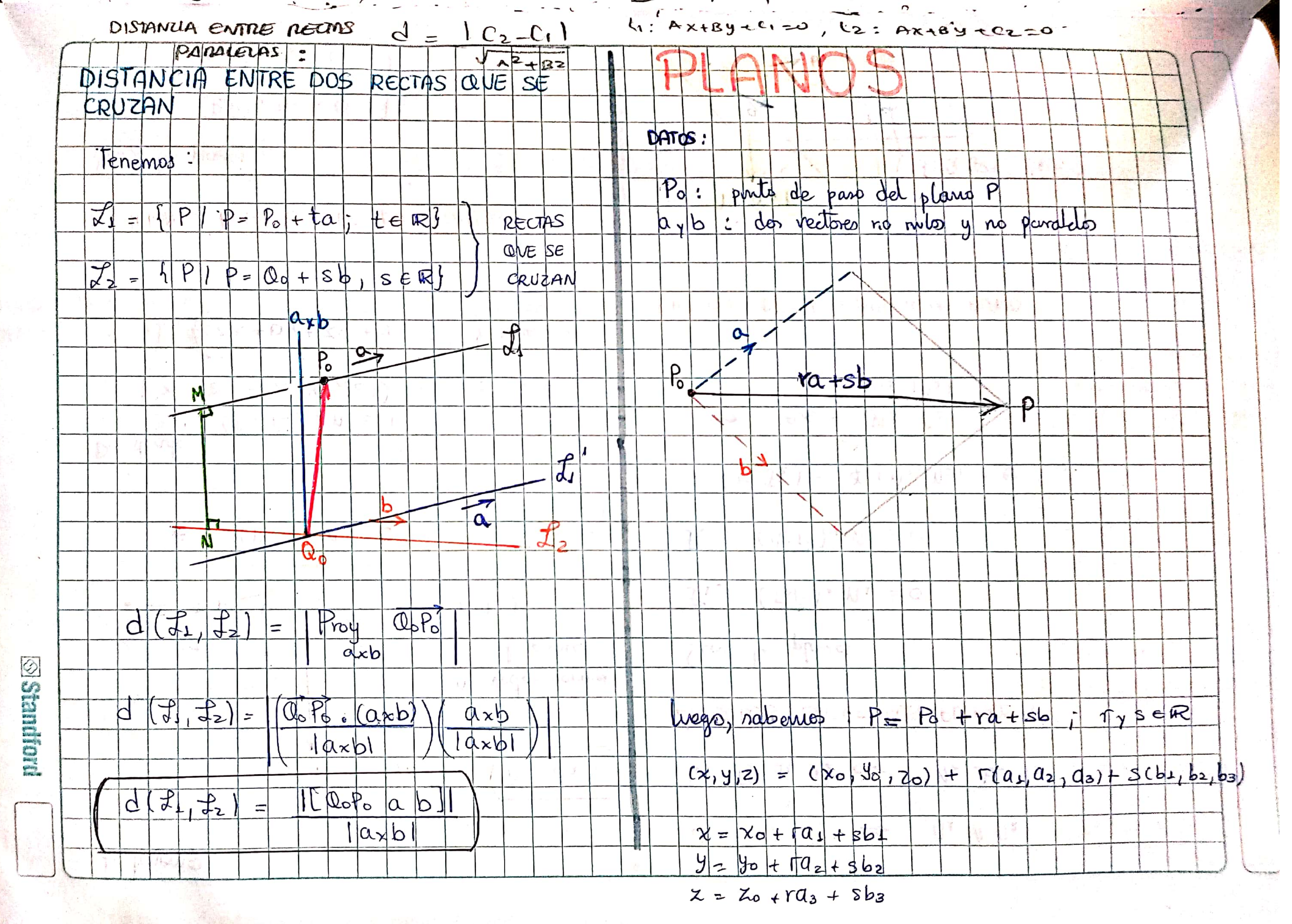
$$\therefore \; d(Q, \mathcal{L}) = \frac{|\overrightarrow{P_0Q} \times a|}{|a|}$$

DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS : $d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $L_1: Ax+By+C_1=0$, $L_2: Ax+By+C_2=0$

DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS QUE SE CRUZAN

Tenemos :

$\mathcal{L}_1 = \{ P \mid P = P_0 + ta ;\ t \in \mathbb{R} \}$
$\mathcal{L}_2 = \{ P \mid P = Q_0 + sb ,\ s \in \mathbb{R} \}$
RECTAS QUE SE CRUZAN



$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \left| \text{Proy}_{a\times b} \overrightarrow{Q_0P_0} \right|$$

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \left| \left(\frac{\overrightarrow{Q_0P_0} \cdot (a\times b)}{|a\times b|} \right) \left(\frac{a\times b}{|a\times b|} \right) \right|$$

$$d(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \frac{|[Q_0P_0\ a\ b]|}{|a\times b|}$$

PLANOS

DATOS :

P_0 : punto de paso del plano P
a y b : dos vectores no nulos y no paralelos

Luego, sabemos : $P = P_0 + ra + sb$; r y $s \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) = (x_0, y_0, z_0) + r(a_1, a_2, a_3) + s(b_1, b_2, b_3)$

$x = x_0 + ra_1 + sb_1$
$y = y_0 + ra_2 + sb_2$
$z = z_0 + ra_3 + sb_3$

EN LOS EXÁMENES COLOCAR LA ECUACIÓN GENERAL O CARTESIANA.

Si tenemos:

$n = (a,b,c)$ $\bar{n} = \bar{a} \times \bar{b}$

n: vector normal al plano

$n \perp \mathcal{P}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{P_0P}) \cdot n = 0$ } ECUACIÓN NORMAL DEL PLANO $\mathcal{P}$

De donde:

$(P - P_0) \cdot n = 0$

$[(x,y,z) - (x_0, y_0, z_0)] \cdot (a,b,c) = 0$

$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$ ⟵ $ax + by + zc + d = 0$ } ECUACIÓN GENERAL O CARTESIANA

$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$; $n = (a,b,c)$

POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Sean los planos:

$\mathcal{P}_1 : (\overrightarrow{P_0P}) \cdot n_1 = 0$

$\mathcal{P}_2 : (\overrightarrow{Q_0P}) \cdot n_2 = 0$

i) $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow n_1 \parallel n_2$ $(n_1 \times n_2 = 0)$ → vector

ii) $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow n_1 \perp n_2$ $(n_1 \cdot n_2 = 0)$ → número

ÁNGULOS ENTRE DOS PLANOS:

Sean los planos:

$\mathcal{P}_1 : (\overrightarrow{P_0P}) \cdot n_1 = 0$

$\mathcal{P}_2 : (\overrightarrow{Q_0P}) \cdot n_2 = 0$

$\measuredangle(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \measuredangle(n_1, n_2) = \theta$

$\rightarrow \cos\theta = \dfrac{n_1 \cdot n_2}{|n_1||n_2|}$ } Se da como resultado el ángulo agudo ya sea en rectas o planos.

DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO:

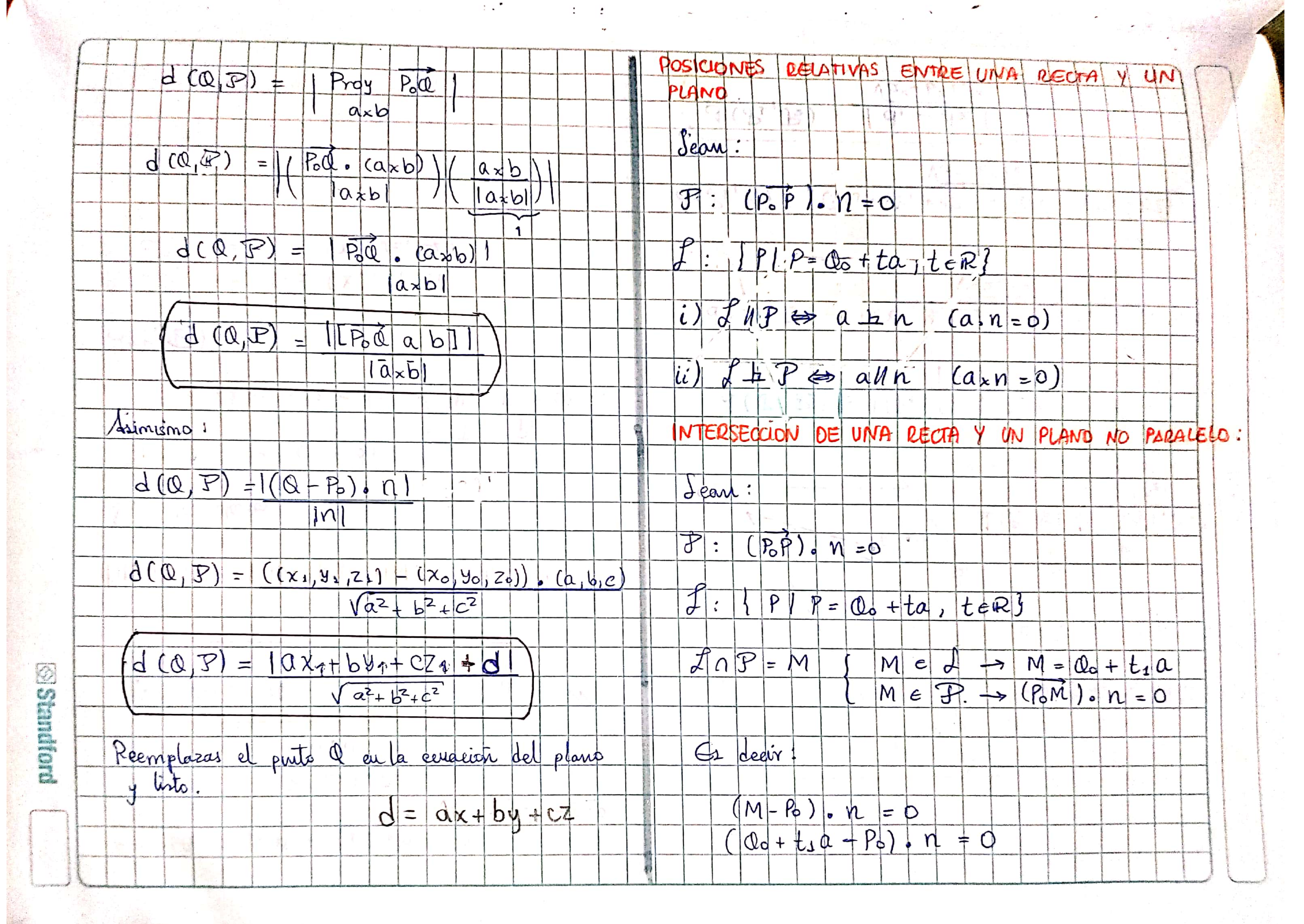
$\mathcal{P}: ax + by + cz +$

$Q = (x_1, y_1, z_1)$

$n = \bar{a} \times \bar{b}$

$d(Q, \mathcal{P}) = |\overrightarrow{MQ}|$

P_0, a, b, M, $\mathcal{P}$



$$d(Q,\mathcal{P}) = \left| \underset{a\times b}{\mathrm{Proy}}\ \overrightarrow{P_0Q} \right|$$

$$d(Q,\mathcal{P}) = \left\| \left(\frac{\overrightarrow{P_0Q} \cdot (a\times b)}{|a\times b|} \right) \underbrace{\left(\frac{a\times b}{|a\times b|} \right)}_{1} \right\|$$

$$d(Q,\mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{P_0Q} \cdot (a\times b)|}{|a\times b|}$$

$$\boxed{d(Q,\mathcal{P}) = \frac{|[\overrightarrow{P_0Q}\ a\ b]|}{|\bar{a}\times\bar{b}|}}$$

Asimismo:

$$d(Q,\mathcal{P}) = \frac{|(Q-P_0)\cdot n|}{|n|}$$

$$d(Q,\mathcal{P}) = \frac{((x_1,y_1,z_1)-(x_0,y_0,z_0))\cdot(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\boxed{d(Q,\mathcal{P}) = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Reemplazas el punto Q en la ecuación del plano y listo.

$$d = ax+by+cz$$

POSICIONES RELATIVAS ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Sean:

$\mathcal{P}: (\overrightarrow{P_0P})\cdot n = 0$

$\mathcal{L}: \{P \mid P = Q_0 + ta,\ t\in\mathbb{R}\}$

i) $\mathcal{L} \parallel \mathcal{P} \Leftrightarrow a \perp n \quad (a\cdot n = 0)$

ii) $\mathcal{L} \perp \mathcal{P} \Leftrightarrow a \parallel n \quad (a\times n = 0)$

INTERSECCIÓN DE UNA RECTA Y UN PLANO NO PARALELO:

Sean:

$\mathcal{P}: (\overrightarrow{P_0P})\cdot n = 0$

$\mathcal{L}: \{P \mid P = Q_0 + ta,\ t\in\mathbb{R}\}$

$$\mathcal{L}\cap\mathcal{P} = M \quad \begin{cases} M\in\mathcal{L} \to M = Q_0 + t_1 a \\ M\in\mathcal{P} \to (\overrightarrow{P_0M})\cdot n = 0 \end{cases}$$

Es decir:

$$(M-P_0)\cdot n = 0$$
$$(Q_0 + t_1 a - P_0)\cdot n = 0$$

$\rightarrow (Q_0 - P_0) \cdot n + t_1 a \cdot n = 0$

$$t_1 = \frac{(P_0 - Q_0) \cdot n}{a \cdot n}$$

$$\therefore \boxed{M = Q_0 + \left(\frac{(P_0 - Q_0) \cdot n}{a \cdot n}\right) a}$$

DISTANCIA ENTRE DOS PLANOS PARALELOS

Sean los planos:

$\mathcal{P}_1 : ax + by + cz = d_1$

$\mathcal{P}_2 : ax + by + cz = d_2$

$\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$

$n_1 = n_2 = (a, b, c)$

$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = ?$

$P_1 \in \mathcal{P}_1 \rightarrow P_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$P_2 \in \mathcal{P}_2 \rightarrow P_2 = (x_2, y_2, z_2)$

Luego:

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{P_1 R}|$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \left| \text{Proy}_{n_2} \overrightarrow{P_2 P_1} \right|$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \left| \left(\frac{(\overrightarrow{P_2 P_1}) \cdot n_2}{|n_2|} \right) \underbrace{\left(\frac{n_2}{|n_2|} \right)}_{1} \right|$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{|(P_1 - P_2) \cdot n_2|}{|n_2|}$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{|(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) \cdot (a, b, c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_2 + by_2 + cz_2)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\boxed{d(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Escaneado con CamScanner

INTERSECCIÓN DE M PLANOS

Sean m planos:

$\mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$\mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
$\vdots$
$\mathcal{P}_m : a_mx + b_my + c_mz = d_m$

i) $r(A_a) = r(A) = 3 \rightarrow$ la intersección de los m planos es un punto.

ii) $r(A_a) = r(A) = 2 \rightarrow$ la intersección de los m planos es una recta.

iii) $r(A_a) = r(A) = 1 \rightarrow$ la intersección de los m planos es un plano.

iv) $r(A_a) \neq r(A) \rightarrow \nexists$ intersección de los m planos.

4 PC : rectas, planos y vectores.

EJERCICIOS:

Determinar la ecuación del plano $\mathcal{P}$ que contiene a la recta

$$\mathcal{L} : \begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

Además es ortogonal al plano : $2x - y + 3z = 2$

$n_1 = (3, 1, -1)$ $\quad n_2 = (1, -2, 1)$

$z = t \rightarrow 3x + y = 3 + t$
$\rightarrow x - 2y = 5 - t$
$3x - 6y = 15 - 3t$

$7y = -12 + 4t$

$y = -\frac{12}{7} + \frac{4t}{7}$ $\quad z = t$

$x = \frac{11}{7} + \frac{t}{7}$

$3x + y =$
$3x - 6y =$

$7y = -12$

$y = -\frac{12}{7}$

$x = \frac{11}{7}$